VJEŽBE IZ MATEMATIKE 1

Ivana Baranović
Miroslav Jerković

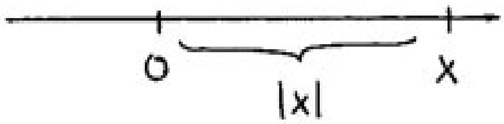
Poglavlje 1

Realni i kompleksni brojevi

Skup realnih brojeva sadrži racionalne (razlomke) i iracionalne brojeve. Svaki element tog skupa može se prikazati u konačnom ili beskonačnom decimalnom zapisu, npr. 3.16, 4.5678, 1.333..., 9.131313..., a možemo ga zamišljati i kao točku nabrojevnom pravcu.

Apsolutna vrijednost realnog broja geometrijski se definira kao udaljenost tog broja od ishodišta na brojevnom pravcu (Slika 1) ili

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ako je} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{ako je} \quad x < 0 \end{cases}$$



Slika 1

Zadatak 1 *Prvo geometrijskom interpretacijom a zatim preko konkretne definicije funkcije apsolutno riješite nejednadžbu* $|x-1| < 2$.

Rješenje:

i) geometrijski: neka je $t = x-1$. Onda imamo $|t| < 2$ što znači da rješenje t čine svi brojevi udaljeni od nule za manje od dva. Jer je $t = x-1$ to znači da $x-1$ mora biti udaljen od nule za manje od dva, tj. da je x udaljen od 1 za manje od dva. Stoga je rješenje intreval $(-1, 3)$

ii) preko definicije: moramo gledati dva slučaja:

1. $x-1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |x-1| = x-1 \quad$ pa imamo $\quad 1 \leq x < 3$

2. $x-1<0 \quad \Rightarrow \quad |x-1|=1-x$ pa imamo $\quad -1<x\leq 1$

Sve skupa $x \in (-1,3)$.

Zadatak 2 *Riješite nejednakost* $|x^2-x|+x>1$.

Rješenje: Ponovno moramo razmotriti dva slučaja, $x^2-x>0$ i $x^2-x<0$. Rješavamo jednakost $x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0$ pa su rješenja očito $x_1=0$ i $x_2=1$. Stoga imamo:

i) $x^2-x\geq 0 \quad \Rightarrow \quad x\in(-\infty,0] \cup [1,+\infty)$

Sada nejednakost daje:

$$x^2-x+x>1 \quad \Rightarrow \quad x^2>1 \quad \Rightarrow \quad |x|>1 \quad \Rightarrow \quad x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$$

pa je presjek $x\in(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$.

ii) $x^2-x<0 \quad \Rightarrow \quad x\in(0,1)$

Nejednakost u ovom slučaju glasi:

$$-x^2+x+x>1 \quad \Rightarrow \quad x^2-2x+1=(x-1)^2<0 \quad \text{što nema rješenja u } \mathbb{R}$$

Stoga je konačno rješenje $x\in(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$.

Zadatak 3 *Grafičkim putem rješite nejednadžbu:*

$$|x+1|+|y-2|\leq 1$$

Rješenje: Trebamo razmotriti četiri neovisna slučaja:

1. $x+1\geq 0,\ y-2\geq 0,$
2. $x+1<0,\ y-2\geq 0,$
3. $x+1\geq 0,\ y-2<0,$
4. $x+1<0,\ y-2<0.$

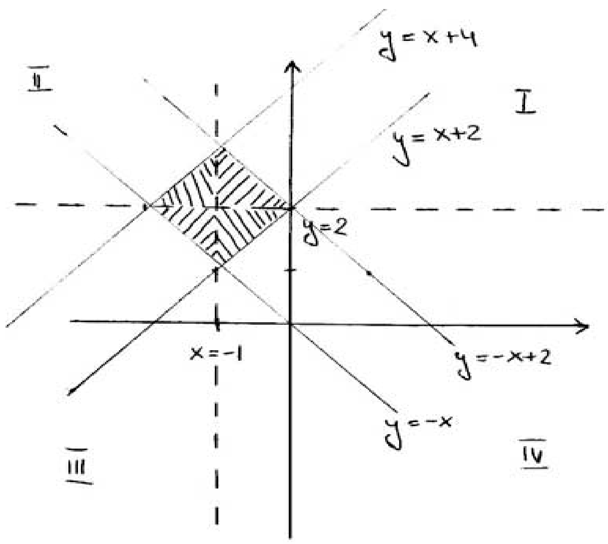
To su, ustvari, područja koja dobijemo kada koordinatnu ravninu podijelimo pravcima $x=-1$ i $y=2$.

Pogledajmo prvi kvadrant, tj. slučaj $x+1\geq 0,\ y-2\geq 0$. U tom slučaju je $|x+1|=x+1$ i $|y-2|=y-2$ i nejednakost izgleda

$$x+1+y-2\leq 1 \quad \Rightarrow y\leq -x+2.$$

Stoga u tom području crtamo pravac $y=-x+2$ i uzimamo područje ispod njega.

Analogno idu i ostala tri slučaja (Slika 2)



slika 2

Svaki **kompleksan broj** se može zapisati kao $z = x + yi$ gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica koja ima svojstvo da $i^2 = -1$. Brojevi x i y se zovu realni, odnosno imaginarni dio od z i pišemo:

$$x = Re(z), \quad y = Im(z).$$

Neka su $z_1 = x_1 + y_1 i$ i $z_2 = x_2 + y_2 i$ dva kompleksna broja. Onda je $z_1 = z_2$ ako i samo ako $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$. Dalje definiramo:

$$\begin{aligned}(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) &= x_1 + y_1 + (x_2 + y_2)i, \\ (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) &= (x_1 y_1 - x_2 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 + y_1)i.\end{aligned}$$

Uz identifikaciju $x = x + 0 \cdot i$, realne brojeve možemo promatrati kao podskup kompleksnih.

Ako je $z = x + yi$, onda kažemo da je kompleksni broj $\overline{z} = x - yi$ konjugiran broju z.

Svojstva konjugiranja: ako su z i w kompleksni brojevi, onda:

(a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

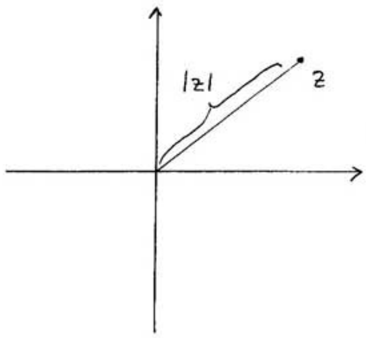
(b) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

(c) $z + \overline{z} = 2Re(z),\ z - \overline{z} = 2iIm(z)$

(d) $\overline{\overline{z}} = z$

(e) $z\overline{z}$ je realan i pozitivan (osim za $z = 0$ kada je $z\overline{z} = 0$).

Ako je z kompleksni broj, njegova apsolutna vrijednost ili modul $|z|$ se definira kao drugi korijen od $z\overline{z}$ tj. $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$. U kompleksnoj ravnini, za $z = (x, y) = x + iy$, apsolutna vrijednost $|z|$ možemo predočiti kao udaljenost točke z od ishodišta (vidi Sliku 3).



Slika 3

Neka je sada $z = x + iy$ proizvoljan kompleksni broj različit od nule . Onda je **apsolutna vrijednost broja** $z \setminus |z|$ jednaka jedan. Slijedi da postoji kut θ takav da

$$\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

tj.

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

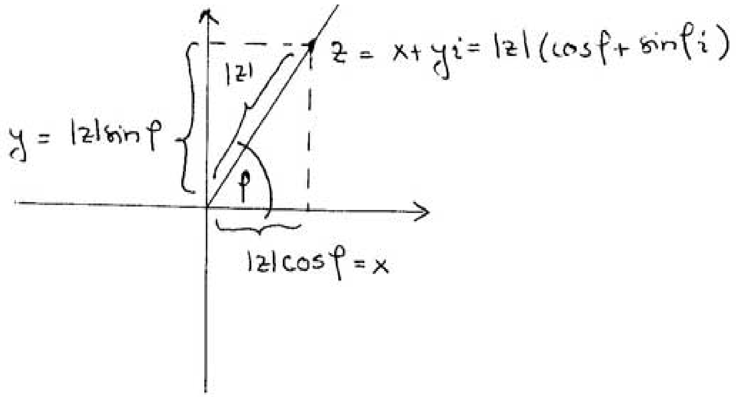
Takav zapis zovemo **polarnom formom** ili **trigonometrijskim oblikom** od z, a $(|z|, \theta)$ zovemo **polarnim koordinatama** kompleksnog broja (pri tome je θ **argument**, $arg(z)$, a $|z|$ **modul**).

$$x = |z|\cos\theta \quad \text{i} \quad y = |z|\sin\theta$$

i dva kompleksna broja $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ i $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ su jednaka ako i samo ako

$$|z_1| = |z_2| \qquad \text{i} \qquad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$$

gdje $k \in \mathbb{Z}$ (Slika 4).



Slika 4

Neka su sada $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1, z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ kompleksni brojevi. Lako se dokazuje da vrijedi formula:

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)),$$

iz čega odmah slijedi:

$$arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2) + 2k\pi, \qquad \text{gdje} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Prethodna formula pokazuje nam također kako se potenciraju kompleksni brojevi; ako uvrstimo $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$, dobivamo:

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

(Za $|z| = 1$ to je poznata Moivreova formula).

Zadatak 4 *Neka je z kompleksan broj takav da $|z| = 1$. Izračunajte $|1+z|^2 + |1-z|^2$.*

Rješenje: Imamo:

$$\begin{aligned}
|1+z|^2 + |1-z|^2 &= (1+z)\overline{(1+z)} + (1-z)\overline{(1-z)} = \\
&= (1+z)(\overline{1}+\overline{z}) + (1-z)(\overline{1}-\overline{z}) = \\
&= (1+z)(1+\overline{z}) + (1-z)(1-\overline{z}) = \\
&= 1 + z + \overline{z} + z\overline{z} + 1 - z - \overline{z} + z\overline{z} = \\
&= 2 + 2|z|^2 = 4
\end{aligned}$$

Zadatak 5 *Riješite jednadžbe:*

(a) $|z+1| + |z+i| = 0$,

(b) $z^2 + iz + 1 = 0$,

(c) $\left|\frac{z}{z+i}\right| = 1 \qquad i \qquad \frac{z}{i\overline{z}} = 1$,

(d) $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1-z|$.

Rješenje:

(a) Neka je $z = x + iy$. Onda imamo

$$|x + 1 + yi| = -|x + (y + 1)i|$$

pa kvadriranjem te jedankosti slijedi:

$$(x + 1)^2 + y^2 = x^2 + (y + 1)^2$$

odnosno

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 + 2y + 1$$

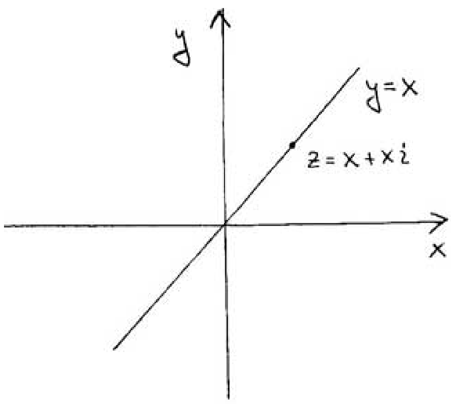
što nakon kraćenja i djeljenja sa dva daje

$$y = x$$

pa je skup rješenja

$$z = \{x + xi \mid x \in \mathbf{R}\}.$$

U kompleksnoj ravnini to je očito pravac $y = x$. (Slika 5).



Slika 5

(b) Opet označimo $z = x + yi$ i imamo

$$x^2 - y^2 + 2xyi + i(x + yi) + 2 = x^2 - y^2 + 2xyi + ix - y + 2 = 0$$

pa slijedi da imaginarni i realni dio broja s lijeve strane moraju biti jednaki nuli. Znači

$$x^2 - y^2 - y + 2 = 0 \quad \text{i} \quad 2xy + x = 0$$

Iz druge jednakosti slijedi da $x = 0$ ili $y = -\frac{1}{2}$. Neka $x = 0$. Onda prva jednakost daje:

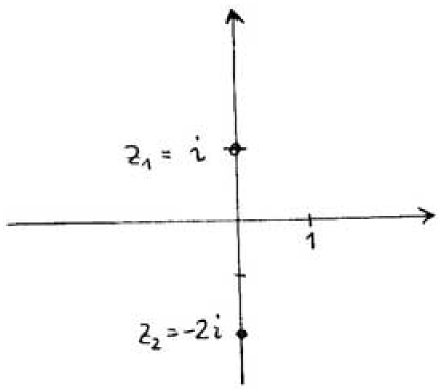
$$y^2 + y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \quad \Rightarrow \quad y_1 = 1,\ y_2 = -2$$

Ako $y = -\frac{1}{2}$ onda iz prve jednakosti dobivamo

$$x^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{9}{4}$$

što ne može biti jer je x realan.

Stoga su jedina rješenja $z_1 = i$ i $z_2 = -2i$ (Slika 6).



Slika 6

(c) Neka $z = x + iy$. Dobivamo:

$$|x + yi| = |x + (y + 1)i| \quad \text{i} \quad x + yi = ix + y.$$

Iz druge jednakosti očito slijedi da $x = y$ pa prva jednakost daje

$$2x^2 = x^2+(x+1)^2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = x^2+x^2+2x+1 \quad \Rightarrow \quad 2x+1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$

Jedino rješenje je, dakle, $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

Zadatak 6 *Dokažite da*

$$Re(z) > 0 \quad i \quad Re(a) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left|\frac{a - z}{\overline{a} + z}\right| < 1.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} |a - z|^2 - |\overline{a} + z|^2 &= (a - z)(\overline{a} - \overline{z}) - (\overline{a} - z)(a - \overline{z}) \\ &= -(a\overline{z} + \overline{a}z + az + \overline{az}) \\ &= -(a + \overline{a})(z + \overline{z}) \\ &= -4Re(a) \cdot Re(z). \end{aligned}$$

Odavde slijedi:

$$|a - z|^2 - |\overline{a} + z|^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad |a - z|^2 < |\overline{a} + z|^2 \quad \rightarrow \quad \left|\frac{a - z}{\overline{a} + z}\right| < 1.$$

Zadatak 7 *Skicirajte u kompleksnoj ravnini brojeve koji zadovoljavaju sljedeće nejednakosti:*

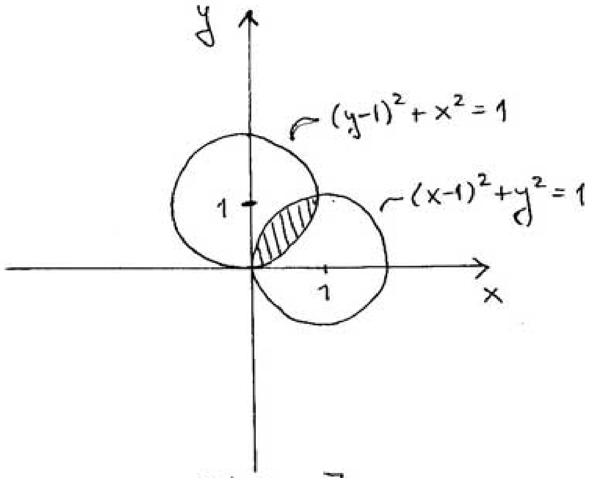
$$|z - i| \leq 1 \qquad i \qquad |z - 1| \leq 1.$$

Rješenje:

Ako stavimo $z = x + yi$ i kvadriramo gornje nejednakosti, dobivamo

$$x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \quad \text{i} \quad (x-1)^2 + y^2 \leq 1$$

pa je rješenje presjek krugova $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$ i $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$. (Slika 7)



Slika 7

Zadatak 8 *Geometrijski prikazati rješenja sljedeće nejednadžbe:*

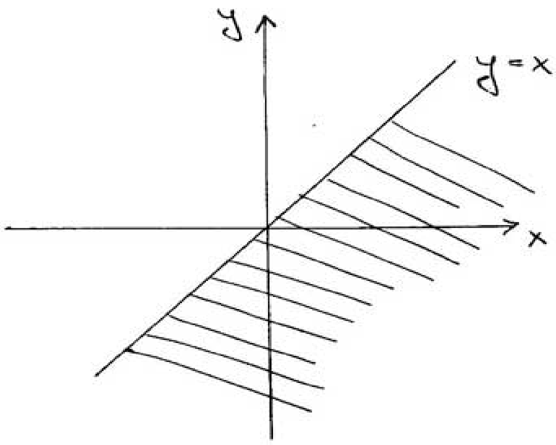
$$Re((1+i)z) \leq 0.$$

Rješenje:

Imamo

$$(1+i)z = (1+i)(x+yi) = x + yi + xi - y$$

pa je rješenje poluravnina $x \leq y$ (Slika 8).



Slika 8

Zadatak 9 *Pokažite da je*

$$Im\left(\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\right)=0$$

jednadžba pravca koji prolazi fiksnim točkama z_1 *i* z_2. *Ako je* $z_1 = 1+i$ *a* $z_2 = 3+5i$, *nacrtajte skup koji zadovoljava* $Im\left(\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\right) > 0$.

Rješenje:

Stavimo $z = x+yi$, $z = x+yi$ i $z = x+yi$. Onda je

$$\frac{z-z_1}{z_2-z_1} = \frac{x+yi-x_1-y_1i}{x_2+y_2i-x_1-y_1i}\cdot\frac{x_2-x_1-(y_2-y_1)i}{x_2-x_1-(y_2-y_1)i} = \frac{((x-x_1)+(y-y_1)i)((x_2-x_1)-(y_2-y_1)i)}{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

i da bi imaginarni dio tog broja bio nula, dovoljno je da imaginarni dio brojnika bude nula jer je nazivnik nakon racionalizacije realan. Dakle mora biti

$$-(x-x_1)(y_2-y_1)+(x_2-x_1)(y-y_1)=0$$

tj

$$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

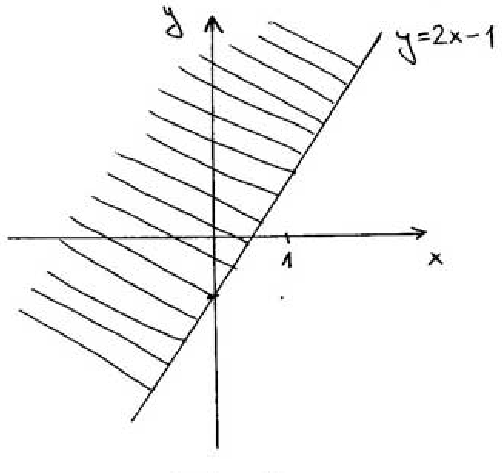
što je točno jednadžba pravca kroz točke (x_1, y_1) i (x_2, y_2). Nejednakost sada izgleda:

$$-(x-x_1)(y_2-y_1)+(x_2-x_1)(y-y_1) > 0 \quad \Rightarrow \quad (x_2-x_1)(y-y_1) > (x-x_1)(y_2-y_1)$$

Uvrstimo zadane vrijednosti za z_1 i z_2 te dobivamo

$$2(y-1) > 4(x-1) \quad \Rightarrow \quad y > 2x-1$$

(Slika 9)



Slika 9

Zadatak 10 *Izračunajte:*

$$(a) \qquad (1-i)^{15} \qquad\qquad (b) \qquad (1+i\sqrt{3})^7.$$

Rješenje:

(a) Prvo prebacujemo broj u trigonometrijski oblik:

$$|z| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{|z|} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

pa zaključujemo da je

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{i} \quad \sin = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{7\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \sin\frac{7\pi}{4}i\right)$$

Sada imamo

$$z^{15} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \sin\frac{7\pi}{4}i\right)\right)^{15} = \sqrt{2}^{15}\left(\cos\frac{15\cdot 7\pi}{4} + \sin\frac{15\cdot 7\pi}{4}i\right).$$

Primjetimo da je $15 \cdot 7 = 105 = 26 \cdot 4 + 1$ pa

$$z^{15} = \sqrt{2}^{15}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}i\right) = \sqrt{2}^{15}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2^7 + 2^7 i$$

zbog 2π periodičnosti trigonometrijskih funkcija.

(b) Ponovo prebacujemo z u trigonometrijski oblik.

$$|z| = \sqrt{4} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{|z|} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Sad imamo da je $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, a $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pa slijedi $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Stoga

$$z^7 = 2^7\left(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\right)^7 = 2^7\left(\cos\frac{7\pi}{3} + \sin\frac{7\pi}{3}i\right).$$

Ovdje opet imamo $7 = 2\cdot 3 + 1$ i zbog periodičnosti dobivamo

$$z^7 = 2^7\left(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}i\right) = 2^7\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2^6(1+\sqrt{3}i).$$

Zadatak 11 *Dokazati da je $(1+i)^{4k}$ realan, a $(1+i)^{4k+2}$ čisto imaginaran broj za k prirodan broj, $k \in \mathbb{N}$.*

Rješenje:
Primjetimo da je

$$(1+i)^2 = 2i \quad \text{i} \quad (1+i)^4 = -4.$$

Odatle odmah slijede tvrdnje zadatka.

Zadatak 12 *Predočite grafički kompleksne brojeve koji zadovoljavaju nejednakosti:* $2 \le |iz - 1| \le 3$.

Rješenje:

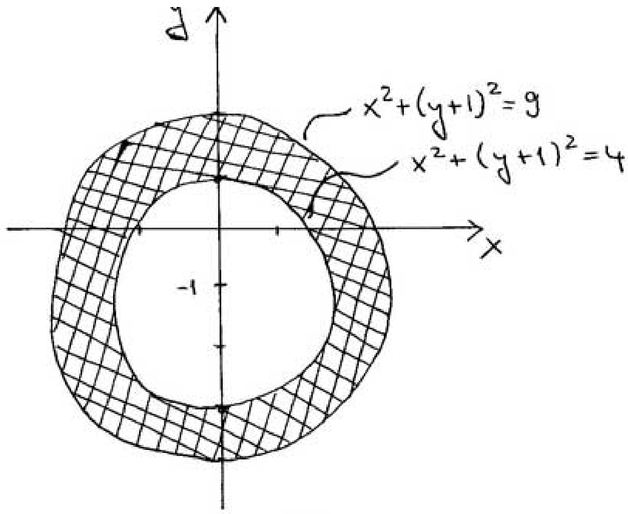
Radi se o dvije nejednakosti. Neka je $z = x + yi$, onda imamo:

$$2 \leq |ix - y - 1| \quad \text{i} \quad |ix - y - 1| \leq 3.$$

Kvadriramo (što smijemo jer je sve pozitivno) i dobijamo:

$$4 \leq (y+1)^2 + x^2 \quad \text{i} \quad (y+1)^2 + x^2 \leq 9.$$

Očito je riječ o kružnom vijencu omeđenom kružnicama $x^2 + (y+1)^2 = 4$ i $x^2 + (y+1)^2 = 9$ (Slika 10).



Slika 10

Zadatak 13 *Odredite skup točaka u ravnini što je određen uvjetom:*

(a) $\left|\frac{z+1+i}{z-1-i}\right| = 1$

(b) $\left|\frac{z-2}{z+1-i}\right| \geq 1$

(c) $\left|\frac{z+2-i}{z+i}\right| \leq 1$

Rješenje:

(b) Imamo

$$\left|\frac{z-2}{z+1-i}\right| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad |z-2| \geq |z+1-i|$$

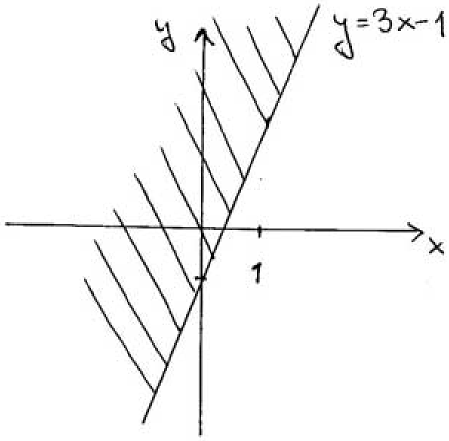
pa ako uvrstimo $z = x + yi$ i kvadriramo (što smijemo jer su obje strane pozitivne) slijedi:

$$(x-2)^2 + y^2 \geq (x+1)^2 + (y-1)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 + y^2 - x^2 - 2x - 1 - y^2 + 2y - 1 \geq 0$$

odnosno

$$-6x + 2y + 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad y \geq 3x - 1.$$

Znači, u pitanju je područje iznad $y = 3x-1$ pravca u kompleksnoj ravnini (Slika 11).



Slika 11

Zadatak 14 *Neka je* $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ *i* $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. *Dokažite da*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)).$$

Zaključite da $arg(\frac{z_1}{z_2}) = arg(z_1) - arg(z_2) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Rješenje:

Ako je $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, onda je $\overline{z_2} = |z_2|(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)$, pa imamo:

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{|z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} \cdot \frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2) = \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|}((\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + (\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)i) = \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + \sin(\theta_1 - \theta_2)i)
\end{aligned}$$

Vježbe iz Matematike 1.

2. Dvodimenzionalni, trodimenzionalni i n-dimenzionalni realni vektorski prostor

Riješeni zadaci

Zadatak 1 Neka je $ABCD$ paralelogram i neka je E sjecište dijagonala, F polovište stranice BC, a G polovište stranice CD. Izračunajte vektore $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{FG}$ i $\overrightarrow{FD}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$.

Rješenje: Očito vrijedi:
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AD}$
Dalje, računamo preostala tri vektora:
$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Zadatak 2 Neka je dana dužina AB i točka C na pravcu kroz A i B, te proizvoljna toèka O. Izrazite $\overrightarrow{OC}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ ako je $|\overline{AC}| = 2|\overline{BC}|$ i:

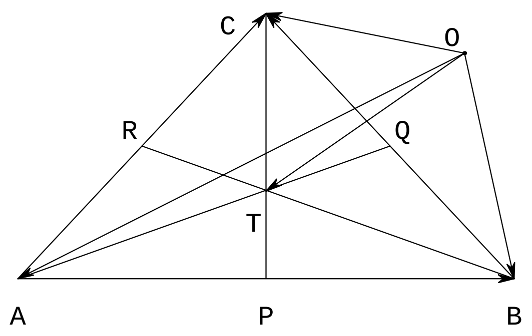
(a) $C \in \overline{AB}$

(b) $C \notin \overline{AB}$.

Rješenje: Uputa: napišite $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$, gdje je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$. Koristeći $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB}$ iz te jednakosti izrazite $\overrightarrow{AC}$.

Zadatak 3 Neka je T težište trokuta ABC, a O prozvoljna toèka. Izrazite vektor $\overrightarrow{OT}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$.

Rješenje:
Sa slike očito slijedi:
$\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AO} = \vec{0}$
$\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$
$\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}$
Zbrajanjem ovih jednakosti dobije se
$3\overrightarrow{OT} + (\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC}) + (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}) = \vec{0}$, tj.
$3\overrightarrow{OT} + (\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \qquad (*)$.



Slika 1: Težište trokuta

Želimo pokazati da je $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\vec{0}$. U tu svrhu računamo $\overrightarrow{TA}$, a pritom koristimo činjenicu da težište dijeli svaku težišnicu u omjeru $2:1$ (računajući od vrha):

$\overrightarrow{TA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{QA}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{BA})=\frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$.

Analogno se dobiva

$\overrightarrow{TB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ i

$\overrightarrow{TC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Zbrajanjem ove tri jednakosti daju $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\vec{0}$, što uvrštanjem u jednakost $(*)$ daje

$\overrightarrow{OT}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

Zadatak 4 Neka su A,B,C,D bilo koje četiri točke prostora. Ako su točke K,L,M,N redom polovišta dužina $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, dokažite da je tada $KLMN$ paralelogram.

Rješenje: Označimo $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{CD}$, $\vec{d}=\overrightarrow{DA}$. Očito je

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}.$$

S druge strane je

$$\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BL}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DN}=\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d},$$

odakle dobivamo

$$\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})=\vec{0},$$

tj. $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{NM}$, dakle $KLMN$ je paralelogram.

Zadatak 5 Zadana su tri vrha paralelograma $ABCD$: $A(-2,-1,1)$, $B(4,-2,2)$ i $C(6,1,3)$. Odredite koordinate točke D.

Rješenje:

U paralelogramu vrijedi jednakost vektora $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. Ako označimo $D = (x, y, z)$, imamo

$$(6-x)\vec{i} + (1-y)\vec{j} + (3-z)\vec{k} = (4+2)\vec{i} + (-2+1)\vec{j} + (2-1)\vec{k}$$

$$(6-x)\vec{i} + (1-y)\vec{j} + (3-z)\vec{k} = 6\vec{i} - \vec{j} + \vec{k},$$

odakle (iz jednakosti vektora s lijeve i s desne strane jednakosti) odmah rješenje: $D = (0, 2, 2)$.

Zadatak se može riješiti i u matričnom zapisu - iz jednakosti $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ slijedi

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

odakle očitavamo da je $D(0, 2, 2)$.

Zadatak 6 Napišite završnu točku vektora $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, ako je početna točka tog vektora dana s $(1, 2, -2)$.

Rješenje: Označimo koordinate završne točke vektora $\vec{a}$ (x, y, z) i koristimo formulu za vektor zadan koordinatama početne i završne točke:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \vec{a},$$

pa dobivamo

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix},$$

tj. završna točka vektora $\vec{a}$ glasi $(3, 5, -6)$.

Zadatak 7 Napišite završnu točku vektora kojem je početna točka $(1, 1, 1)$, a dva puta je dulji od vektora s početnom točkom $(-1, 2, 3)$ i završnom točkom $(0, 1, -2)$.

Rješenje: Označimo prvi vektor s $\vec{a}$, drugi vektor s $\vec{b}$, a početnu točku vektora $\vec{a}$ s (x, y, z). Iz $\vec{a} = 2\vec{b}$ slijedi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \text{-2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{-1} \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix})$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ \text{-1} \\ \text{-5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ \text{-2} \\ \text{-10} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \text{-1} \\ \text{-9} \end{bmatrix},$$

tj. završna točka vektora $\vec{a}$ glasi $(3, -1, -9)$.

Zadatak 8 Nađite točku B orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ takve da je $A(1, 2, 3)$, a $P(2, 3, 7)$ je polovište dužine $\overline{AB}$.

Rješenje: Kako je P polovište dužine $\overline{AB}$, to je $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AP}$. Ako označimo $B(x, y, z)$ mora vrijediti

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix},$$

odakle je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix},$$

dakle završna točka glasi $B(3, 4, 11)$.

Napomena:

Gornji zadatak nam daje ideju da izvedemo formulu za koordinate polovišta P dužine $\overline{T_1T_2}$ dane s $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_2, y_2, z_2)$. Označimo najprije $P(x, y, z)$. Iz jednakosti vektora $\overrightarrow{T_1P} = \frac{1}{2}\overrightarrow{T_1T_2}$ slijedi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix})$$

slijedi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix},$$

tj.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}.$$

Vidimo da je **polovište dužine** $\overline{T_1T_2}$ dane s $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_1, y_2, z_2)$ dano s

$$P(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}).$$

Slično se može izvesti formula za koordinate težišta trokuta $T_1T_2T_3$ zadanog s $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_2, y_2, z_2)$, $T_3(x_3, y_3, z_3)$ - **težište trokuta** $T_1T_2T_3$ dano je s

$$T(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}).$$

Zadatak 9

a) Provjerite koja dva od vektora $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$ su kolinearni.

b) Nađite realne brojeve x i y tako da vektori $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ i $\vec{b} = 3\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ budu kolinearni.

Rješenje:

a) Po kriteriju za kolinearnost lako dobivamo da za $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vrijedi

$$\frac{2}{3} \neq \frac{-1}{2} \neq \frac{3}{-1},$$

što znači da $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni. Isto se tako vidi da $\vec{b}$ i $\vec{c}$ nisu kolinearni. No, za $\vec{a}$ i $\vec{c}$ imamo

$$\frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{3}{-6},$$

pa su vektori $\vec{a}$ i $\vec{c}$ kolinearni.

b) Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni ako i samo ako vrijedi

$$\frac{-1}{3} = \frac{2}{x} = \frac{-1}{y},$$

što je sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice. Lako dobivamo da je $x = -6$ i $y = 3$.

Zadatak 10 Prikažite vektor $\vec{c} = -4\vec{j} - 3\vec{k}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$ i $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Rješenje: Prikazati $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ znači naći koeficijente α i β tako da vrijedi

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b},$$

tj.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha + \beta \\ -\alpha + \beta \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Vidimo da dobivamo sustav od tri jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} 3\alpha + \beta &= 0 \\ -\alpha + \beta &= -4 \\ \beta &= -3. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem $\beta = -3$ u prvu jednadžbu dobivamo da je $3\alpha = 3$, tj. $\alpha = 1$. Uvrštavanjem $\beta = -3$ i $\alpha = 1$ provjeravamo da je rješenje dobro. Dakle dobili smo sljedeći prikaz $\vec{c}$ kao linearne kombinacije vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}.$$

Napomena: Primijetimo da u prethodnom zadatku rješenje koje smo dobili iz prve i treće jednadžbe nije moralo zadovoljavati i drugu jednadžbu. Da se to dogodilo zaključili bismo da $\vec{c}$ nije moguće prikazati kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. To općenito i jest tako: da bismo prikazali svaki vektor prostora kao linearnu kombinaciju vektora, potrebna su nam najmanje **tri** vektora (mi općenito uzimamo koordinatne vektore $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$).

Zadatak 11 Prikažite vektor $\vec{d} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$ pomoću vektora $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ i $\vec{c} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

Rješenje: Tražimo koeficijente α, β i γ tako da vrijedi

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Imamo sada

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha + 2\beta + 4\gamma \\ -3\alpha + 4\beta + 2\gamma \\ \alpha + 3\beta + 4\gamma \end{bmatrix}.$$

Dobivamo sljedeći sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice:

$$\begin{aligned} 2\alpha + 2\beta + 4\gamma &= 2 \\ -3\alpha + 4\beta + 2\gamma &= 3 \\ \alpha + 3\beta + 4\gamma &= 3. \end{aligned}$$

Jedinstveno rješenje je dano s $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = -1$, tako da je

$$\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}.$$

Zadaci za samostalno rješavanje

Zadatak 12 Neka je $ABCD$ paralelogram i neka je E sjecište dijagonala, F polovište stranice BC, a G polovište stranice CD. Izrazite vektore $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{FG}$ i $\overrightarrow{FD}$ pomoću vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AE}$.

Rješenje:
$\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{BC} = -1\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{FG} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{FD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$

Zadatak 13 Zadana su tri vrha paralelograma $ABCD$: $A(1, 2, 3)$, $C(0, -1, 2)$ i $D(2, -1, 5)$. Odredite koordinate vrha B.

Rješenje: $B = (-1, 2, 0)$

Zadatak 14 Napišite vektor $\vec{a}$ koji je dvostruko kraći od vektora s početnom točkom $(2, -1, -4)$ i završnom točkom $(4, -1, 2)$.

Rješenje: $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k}$

Zadatak 15 Nađite završnu točku vektora $\vec{u}$ kojem je početna točka $(2, -1, -1)$, te vrijedi $\vec{u} = -3\vec{v}$, gdje je $\vec{v}$ vektor s početnom točkom $(2, 0, -3)$ i završnom točkom $(-1, -1, 2)$.

Rješenje: $(11, 2, -16)$

Zadatak 16 Nađite realne brojeve x i y takve da vektori $2x\vec{i}+y\vec{j}-\vec{k}$ i $4\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ budu kolinearni.

Rješenje: $x = -1$, $y = \frac{3}{2}$

Zadatak 17 Napišite vektor $\vec{d} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} + \vec{k}$.

Rješenje: $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$

Zadatak 18 Pokažite da se vektor $\vec{c} = 2\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$ ne može prikazati kao linearna kombinacija vektora $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

Rješenje: Ssustav koji proizlazi iz $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ nema rješenja.

Vježbe iz Matematike 1.

3. Zapis nekih transformacija ravnine i prostora - pojam matrice i linearnog operatora.

Zadatak 1 Nađite vektor translacije koji prevodi točku $(2,1,3)$ u točku $(1,1,2)$.

Zadatak 2 Nađite točku dobivenu translacijom točke $(-1,0,5)$ za vektor $\vec{v} = 3\vec{a} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

Zadatak 3 Napišite matrično operator rotacije za kut od:

a) $\alpha = 45^\circ$

b) $\alpha = 150^\circ$

c) $\alpha = 300^\circ$

u ravninskom koordinatnom sustavu.

Zadatak 4 Za koji kut treba rotirati točku $(2,2)$ da bismo dobili točku $(-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3})$? Napišite matricu te transformacije!

Zadatak 5 Napišite matrice sljedećih transformacija prostora:

a) rotacija oko $y-$osi za kut od $\alpha = 240^\circ$

b) simetrija obzirom na $x-z$ ravninu

c) projekcija na $y-z$ ravninu,

te ih primijenite redom na sljedeće točke:

1) $(1,1,1)$

2) $(2,-1,4)$

3) $(0,3,-2)$.

Zadatak 6 Primijenite sukcesivno na točku $(2,2,1)$ sljedeće transformacije prostora:

a) transformaciju a), potom transformaciju b) iz prethodnog zadatka

b) transformaciju b), potom transformaciju a) iz prethodnog zadatka.

Dobivate li iste točke? Objasnite zašto!

Zadatak 7 Pokažite da množenjem matrica transformacija pod a) i b) u zadatku 5 dobivate matricu koja primijenjena na proizvoljnu točku prostora daje istu točku koju bismo dobili da smo početnu točku sukcesivno transformirali najprije jednom, a potom drugom transformacijom (nebitno kojim redoslijedom).

Zadatak 8 Napišite primjer matrice preslikavanja:

a) ravnine u prostor

b) prostora u ravninu

c) ravnine u ravninu

d) prostora u prostor.

Koje od ovih matrica možemo množiti i u kojem redoslijedu? Objasnite!

Zadatak 9 Pronađite tri različite transformacije prostora čija sukcesivna primjena na proizvoljnu točku daje istu tu točku. Pokažite da je umnožak matrica tih preslikavanja jedinična matrica.

Zadatak 10 Pokažite da sukcesivnom primjenom sljedećih transformacija ravnine rotacije za kut α, centralne simetrije te rotacije za kut $180° - \alpha$ u ravnini dobivamo identitetu, tj. transformaciju koja preslikava točku u nju samu. Interpretirajte zadatak geometrijski (crtežom) i analitički (tako da pokažete da umnožak matrica ovih transformacija daje jediničnu matricu)!

Poglavlje 1

Algebra matrica

Neka su m i n prirodni brojevi. Shema u kojoj familiju A realnih brojeva a_{ij} $(i \in \{1,\ldots,m\}, j \in \{1,\ldots,n\})$ zapisujemo na sljedeći način

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

zove se **matrica** od **m redaka** i **n stupaca**, tj. matrica **tipa m × n**. Za element a_{ij} kažemo da dolazi na mjestu (i,j) u matrici A. Skraćeno matricu zapisujemo (a_{ij}).

Dvije matrice $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ su **jednake** ako su istog tipa $m \times n$ i $a_{ij} = b_{ij}$ za svaki $i \in \{1,\ldots,m\}$ i svaki $j \in \{1,\ldots,n\}$.

Brojevi $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ čine **prvi redak**, $a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}$ **drugi redak**, a $a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}$ **m-ti redak** matrice A.

Brojevi $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}$ čine **prvi stupac**, $a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}$ **drugi stupac**, a $a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}$ **n-ti stupac** matrice A.

Za matricu A kažemo je **kvadratna matrica n-tog reda** ako je $m = n$.

Transponirana matrica matrice $A = (a_{ij})$ tipa $m \times n$ je matrica $B = (b_{ji})$ tipa $n \times m$ za koju je $b_{ji} = a_{ij}$ $(i \in \{1,\ldots,m\},\ j \in \{1,\ldots,n\})$. To možemo shvatiti kao zamjenu uloga stupaca i redaka, stupci postaju retci i obratno. Transponiranu matricu označavamo s A^{τ}.

Zadatak 1 *Nađite transponiranu matricu matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Rješenje:

Za matricu $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ je $A^{\tau} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Zbrajati se mogu samo matrice istog tipa, i to na sljedeći način:

Zbroj matrica $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ tipa $m \times n$ je matrica $C = (c_{ij})$ tipa $m \times n$ s elementima $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, što znači da se zbrajaju elementi na istim pozicijama.

Zadatak 2 *Zbrojite slijedeće matrice:* $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *i* $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Rješenje: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1+2 & 3+(-1) & 2+5 \\ -1+(-3) & 0+(-1) & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definiramo množenje matrice skalarom: **Produkt broja λ s matricom** $A = (a_{ij})$ tipa $m \times n$ je matrica $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

Zadatak 3 *Nađite slijedeći produkt matrice i skalara:* $(-3)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Rješenje: $(-3)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} (-3)\cdot 2 & (-3)\cdot(-1) & (-3)\cdot 3 \\ (-3)\cdot 0 & (-3)\cdot 1 & (-3)\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -9 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Za zbrajanje matrica i množenje matrica skalarom vrijede svojstva koja vrijede i za realne brojeve, dakle asocijativnost, komutativnost, te distributivnost množenja (skalarom) prema zbrajanju.

Razliku matrica $A - B$ treba shvatiti kao skraćeni zapis za $A + (-1) \cdot B$.

Preostaje još definirati množenje matrica. Produkt AB matrica A i B definira se samo ako matrica A ima toliko stupaca koliko matrica B ima redaka. Broj redaka matrice AB isti je kao i matrice A, a broj stupaca jednak je broju stupaca matrica B.

Neka je matrica A tipa $m \times n$ i B tipa $n \times p$. **Produkt matrica** A i B je matrica C tipa $m \times p$, čiji su elementi dani s

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots a_{in}b_{nj}$$

to jest, na ij-otom mjestu je umnožak i-tog redtka matrice A i j-tog stupca matrice B.

Zadatak 4 *Nađite AB i BA ako su A i B slijedeće matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rješenje: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 & 3\cdot 5 + 1\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1 & 0\cdot 5 + (-1)\cdot 2 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 19 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$,

$BA = \ldots = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 \\ -3 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Iz definicije i primjera se vidi da množenje matrica općenito **nije komutativno**. Dapače, čest je slučaj da postoji umnožak dviju matrica AB, ali uopće nije definiran umnožak BA, pa uspoređivanje matrica AB i BA nema smisla.

Međutim, množenje matrica jest asocijativno, tj. za svake tri matrice A, B i C takve da su svi produkti AB, $(AB)C$, BC i $A(BC)$ definirani, vrijedi

$$(AB)C = A(BC).$$

Važnu ulogu u množenju matrica imaju jedinična i nul-matrica. Pod uvjetom da je za proizvoljnu zadanu matricu A množenje jediničnom matricom I (nekog reda) i nul-matricom O (nekog reda) dobro definirano, vrijedi $A \cdot I = I \cdot A = A$ (tj. jedinična matrica djeluje kao neutralni element za operaciju množenja matrica) i $A \cdot O = O \cdot A = O$.

Formalno možemo uvesti potenciranje matrice prirodnim brojevima: produkt $A \cdot A$ skraćeno pišemo kao A^2, $A \cdot A \cdot A = A^3$ itd.

Množenje matrica je distributivno prema zbrajanju slijeva i zdesna (uz uvjet da su svi produkti dobro definirani):

$$C(A+B) = CA + CB,$$

$$(A+B)D = AD + BD.$$

Vrijede i slijedeća svojstva za množenje skalarom λ:

$$\lambda(AB) = (\lambda A)D = A(\lambda D).$$

Zadatak 5 *Izračunajte $A + 2B$ za sljedeće matrice (ako postoji):*

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Rješenje:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Zadatak 6
Za matrice A i B izračunajte AB i BA (ako postoje):

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 2 & -6 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & -3 & 10 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Rješenje:

(a)

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 3\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 3\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 1 & 3\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2\cdot 0 \\ 0\cdot 0 - 1\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 1 - 1\cdot 0 + 1\cdot 1 & 0\cdot 0 - 1\cdot 1 + 1\cdot 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

BA ne postoji jer bi imali množenje 3×3 matrice s 2×3 matricom što nije definirano.

Zadatak 7 *Neka je* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. *Izračunajte* A^3 *i* $(A^\tau)^2$.

1.1 Determinanta

Determinanta je realna funkcija koja kvadratnoj matrici pridružuje realan broj (kojeg zovemo **determinanta matrice**), a osnovna svojstva kojeg zadovoljava jesu:

$$
\begin{aligned}
\det(AB) &= \det A \cdot \det B = \det B \cdot \det A = \det(BA) \\
\det I &= 1.
\end{aligned}
$$

Determinantu matrice $A = (a_{ij})$ označavamo s $|a_{ij}|$, npr. za matricu $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ pišemo umjesto $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ skraćeno $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Funkciju $A \to \det A$ možemo definirati razvojem po prvom retku:

(1) Za kvadratnu matricu **prvog** reda (degenerirani slučaj, jer se matrica sastoji od samo jednog elementa) definiramo: $\det(a) := |a|$

(2) Za kvadratnu matricu **drugog** reda:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} := a_1 b_2 - a_2 b_1$$

(3) Za kvadratnu matricu **trećeg** reda:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} := a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$\vdots$

(n) Za kvadratnu matricu **n-tog** reda $A = (a_{ij})$ definiramo

$$\det A := a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \ldots + (-1)^{n-1} a_{1n} \det A_{1n},$$

gdje je A_{1k} ($k \in \{1, \ldots, n\}$) kvadratna matrica (n-1)-og reda koja se od matrice A dobije ispuštanjem prvog retka i k-tog stupca.

U definiciji determinante za opću matricu n-tog reda mogli smo fiksirati bilo koji redak ili stupac, nije bilo potrebno uzeti baš prvi redak.

Zadatak 8 *Razvojem po drugom retku izračunajte*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Rješenje: Svakom elementu gornje matrice pridružen je multiplikativni faktor 1 ili -1, ovisno o tome na kojem se mjestu u matrici element nalazi. Npr. broj 4 se nalazi na presjeku drugog retka i drugog stupca, pa je njemu pridružen faktor $(-1)^{2+2}$, dakle broj 1 (općenito, elementu a_{ij} pridružen je broj $(-1)^{i+j}$). Razvoj po drugom retku sada izgleda ovako:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{2+3} \cdot (-5) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (9+2) + 4 \cdot (6-1) + 5(-4-3) = -4.$$

Zadatak 9 *Izračunajte determinatu matrice iz prošlog zadatka razvojem po trećem stupcu i prvom reku te se uvjerite da vrijednost determinante zadane kvadratne matrice* ***ne ovisi*** *o tome po kojem se stupcu ili retku determinanta razvija. Ova činjenica znatno olakšava računanje determinante, jer nam omogućuje da izaberemo stupac ili redak po kojem razvijamo determinantu. U pravilu biramo onaj redak ili stupac koji sadrži najviše nula.*

Zadatak 10 *Izračunajte determinantu matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Zadatak 11

Izračunajte determinante sljedećih matrica:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \cos\alpha + \imath\sin\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha - \imath\sin\alpha \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & \log_y x \\ \log_x y & 1 \end{pmatrix}$.

Zadatak 12 *Izračunajte determinantu matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Rješenje: Razvojem po trećem retku imamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

1.2 Inverzna matrica

Pojam inverzne matrice uvodimo samo za kvadratne matrice. Za kvadratnu matricu A n-tog reda kažemo da je **regularna** (**invertibilna**) ako postoji matrica B reda n tako da vrijedi

$$AB = BA = I,$$

gdje je I jedinična matrica reda n. Kažemo da je matrica **singularna** ako ona nije regularna.

Može se pokazati da je matrica B iz definicije inverzne matrice **jedinstvena**. Stoga za nju uvodimo posebnu oznaku: ako matrica A ima inverz, označavat ćemo ga s A^{-1}. Po definiciji dakle vrijedi:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

Za svake dvije invertibilne matrice A i B reda n, te jediničnu matricu I istog reda vrijede sljedeća svojstva:

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$

(2) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

(3) $I^{-1} = I$

Za invertibilnost imamo važan kriterij: singularna matrica ima determinantu nula, što znači da su sve matrice koje imaju determinantu različitu od nule nužno regularne (invertibilne matrice), a vrrijedi i obrat. Drugim riječima, regularne matrice su one i samo one kvadratne matrice koje imaju determinantu različitu od nule. Ovo nam daje dobar način provjere postojanja inverza zadane kvadratne matrice.

Sada ćemo vidjeti kako se pojam determinante može iskoristiti za izračunavanje inverza kvadratne matrice.

Adjunkta A^* kvadratne matrice A je matrica koja na (i,j)-om mjestu ima broj $(-1)^{j+i} \cdot \det A_{ij}^\tau$ (zovemo ga **kofaktor** ili **algebarski komplement** elementa a_{ij}), gdje je A_{ij}^τ matrica dobivena iz transponirane matrice A^τ izbacivanjem i-og retka i j-og stupca.

Zadatak 13 *Za matricu* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ *izračunajte adjunktu.*

Rješenje: Prvo računamo transponiranu matricu A^τ :

$$A^\tau = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Zatim računamo $A^* = (a_{ij}^*)$ po elementima:

$$a_{11}^* = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 - (-1) \cdot 5 = 2$$

$$a_{12}^* = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(1 \cdot 3 - 2 \cdot 5) = 7$$

$$\vdots$$

$$a_{33}^* = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 = -4,$$

što daje $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -11 & -1 & 7 \\ 17 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

Preko adjunkte možemo izračunati i inverznu matricu zadane kvadratne matrice A. Naime, vrijedi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*.$$

Zadatak 14 *Izračunajte inverz matrice iz prethodnog primjera.*

Rješenje: Već smo izračunali ajdunktu A^* matrice A, pa preostaje izračunati samo determinantu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 25,$$

pa je

$$A^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -11 & -1 & 7 \\ 17 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Zadatak 15 *Pomnožite gornji inverz i matricu A te se uvjerite da stvarno dobivate jediničnu matricu I.*

Zadatak 16

Metodom adjunkte odredite inverz matrice iz Zadatka 8.

1.3 Veza operatora i matrica

Iz lekcija prije znamo da se razne funkcije, kao npr. transformacije ravnine, mogu predstaviti preko matrica. Množenje matrica u tom slučaju odgovara komponiranju funkcija a inverzna matrica pripada inverznoj funkciji (ako ista postoji).

Zadatak 17 *Provjerite preko matrica da je kompozicija rotacije oko ishodišta u ravnini za kut α i rotacije oko ishodišta u ravnini za kut β upravo rotacija u ravnini oko ishodišta za kut $\alpha+\beta$.*

Rješenje:
rotacija za kut α ima matrični prikaz $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$
roatcija za kut β ima matrični prikaz $B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$
Množimo te dvije matrice:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \\ = & \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} = \\ = & \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i dobivamo upravo matricu rotacije u ravnini oko ishodišta za kut $\alpha+\beta$.

Zadatak 18 *Nađite inverznu funkciju centralne simetrije u prostoru oko xz ravnine.*

Rješenje: Gledamo matricu te centralne simetrije, x i z koordinata točke ostaju iste a y prelazi u $-y$ pa je to:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Metodom adjunkte ili direktnim uočavanjem vidimo da je inverz te matrice upravo ona sama, tj.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zaključujemo da je inverz naše centralne simetrije opet ta ista centralna simetrija što je i jasno iz definicije funkcije.

Vježbe iz Matematike 1.

5. Skalarni, vektorski i mješoviti produkt vektora

Zadatak 1 Koji kut zatvaraju jedinični vektori $\vec{m}$ i $\vec{n}$ ako su vektori $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ i $\vec{b} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ međusobno ortogonalni?

Rješenje:

Činjenicu da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ortogonalni pišemo preko skalarnog produkta:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
$(\vec{m} + 2\vec{n}) \cdot (5\vec{m} - 4\vec{n}) = 0$
$5\vec{m}^2 + 10\vec{n}\vec{m} - 4\vec{m}\vec{n} - 8\vec{n}^2 = 0$ (distributivnost, komutativnost i $\vec{v}^2 = |\vec{v}|^2$)
$5|\vec{m}|^2 + 6\vec{m}\vec{n} - 8|\vec{n}|^2 = 0$ ($\vec{m}$ i $\vec{n}$ su jedinični: $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$)
$5 + 6\cos\varphi - 8 = 0$ (φ je kut između vektora $\vec{m}$ i $\vec{n}$)
$\cos\varphi = -\frac{1}{2}$,
odakle slijedi da je $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

Zadatak 2

Zadano je $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Izračunajte $|\vec{a} + \vec{b}|$.

Rješenje: $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\vec{b}$
Slično proizlazi
$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\vec{b}$, pa zbrajanjem tih jednakosti imamo
$|\vec{a}+\vec{b}|^2 + |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$, odakle uvrštavanjem odmah slijedi rješenje:
$|\vec{a} + \vec{b}| = 20$.

Zadatak ima i geometrijsku interpretaciju: nađi kraću dijagonalu paralelograma kojem su duljine stranica 11 i 23, a duljina duže dijagonale iznosi 30.

Zadatak 3 Zadana su tri vrha paralelograma $ABCD$: $A(-2,-1,1)$, $B(4,-2,2)$ i $C(6,1,3)$. Odredite površinu paralelograma te kut između dijagonala.

Rješenje:

U paralelogramu vrijedi jednakost vektora $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. Ako označimo $D = (x,y,z)$, imamo
$(6-x)\vec{i} + (1-y)\vec{j} + (3-z)\vec{k} = (4+2)\vec{i} + (-2+1)\vec{j} + (2-1)\vec{k}$
$(6-x)\vec{i} + (1-y)\vec{j} + (3-z)\vec{k} = 6\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$,

odakle (iz jednakosti vektora s lijeve i s desne strane jednakosti) odmah rješenje: $D = (0,2,2)$.

Površinu paralelograma ćemo izračunati tako da nađemo skalarni produkt vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$, jer znamo da njegov modul odgovara površini paralelograma P. Najprije računamo:

$$\overrightarrow{AB} = 6\vec{i} - \vec{j} + \vec{k},$$

$$\overrightarrow{AD} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}.$$

Sada je površina paralelograma dana s

$$P = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 4\vec{j} + 20\vec{k} = \sqrt{4^2 + 4^2 + 20^2} = 12\sqrt{3}.$$

Računamo vektore dijagonala $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BD}$:

$$\overrightarrow{AC} = 8\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k},$$

$$\overrightarrow{DB} = 4\vec{i} - 4\vec{j},$$

pa je (uz oznaku α za kut među dijagonalama)

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|} == \frac{32 - 8}{\sqrt{8^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{4^2 + 4^2}} = \frac{1}{2},$$

pa je kut među dijagonalama $\alpha = 30°$.

Zadatak 4 Pokažite da su sljedeći vektori komplanarni

$\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

$\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

$\vec{c} = \vec{i} + 4\vec{j} - 7\vec{k}$,

te izrazite $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Rješenje: Vektori će biti komplanarni ako je njihov skalarni produkt jednak nuli:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 2(-7 + 8) + (-7 + 2) + (4 - 1) = 0,$$

što ovdje jest slučaj. Dakle, zadani vektori su komplanarni.

Da izrazimo $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, trebamo pronaći α i β takve da je $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$:

$$\vec{i} + 4\vec{j} - 7\vec{k} = \alpha(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) + \beta(\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}),$$

odakle slijedi sustav

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta &= -1 \\ -\alpha + \beta &= 4 \\ \alpha - 2\beta &= -7. \end{aligned}$$

Rješavanjem prve dvije jednadžbe ovog sustava dobivamo $\alpha = -1$, $\beta = 3$, što zadovoljava i treću jednadžbu (to je još jedna potvrda da su vektori komplanarni). Prikaz vektora $\vec{c}$ kao linearne kombinacije vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ glasi: $\vec{c} = -\vec{a} + 3\vec{b}$.

Zadatak 5 Odredite $x \in \mathbb{R}$ tako da vektori $\vec{a} = (2x-6)\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = (3x-1)\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = (3-8x)\vec{i} + (x-2)\vec{j} - 3x\vec{k}$ budu komplanarni, te u tom slučaju izrazite vektor $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Rješenje:

Vektori će biti komplanarni ako i samo ako je

$$\begin{vmatrix} 2x-6 & 4 & -3 \\ 3x-1 & 2 & 2 \\ 3-8x & x-2 & -3x \end{vmatrix} = 0,$$

odakle dobivamo dva rješenja:

$x_1 = 4$ i $x - 2 = -\frac{3}{11}$.

Pogledajmo kako izgledaju vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ za $x = 4$. Dobiva se

$\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 11\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ i $\vec{c} = -29\vec{i} + 2\vec{j} - 12\vec{k}$.

Znamo da su ova tri vektora komplanarna, tj. da jedan od njih možemo izraziti kao linearnu kombinaciju prostalih dvaju, uzmimo vektor $\vec{c}$:

$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, tj.

$-29\vec{i} + 2\vec{j} - 12\vec{k} = \alpha(2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}) + \beta(11\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$,

odakle izjednačavanjem koeficijenata uz koordinatne vektore dobivamo

$$\begin{aligned} 2\alpha + 11\beta &= -29 \\ 4\alpha + 2\beta &= 2 \\ -3\alpha + 2\beta &= -12. \end{aligned}$$

Ovaj sustav od tri jednadžbe s dvije nepoznanice ima jedinstveno rješenje i ono iznosi $\alpha = 2$, $\beta = -3$, pa je prikaz vektora $\vec{c}$ kao linearne kombinacije vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dan s $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

Zadatak 6 Pokažite da su vektori $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{j} - 3\vec{k}$ linearno nezavisni i prikažite vektor $\vec{i}$ kao njihovu linearnu kombinaciju.

Zadatak 7 Dokažite da vektori: $\vec{a} = -\vec{i} - 2\vec{j} + x\vec{k}, \vec{b} = -4\vec{j} + x\vec{k}, \vec{c} = x\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ za nijedan $x \in \mathbb{R}$ nisu komplanarni!

Poglavlje 1

Linearni sustavi

Linearne sustave možemo općenito zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

što označava sustav od m linearnih jednažbi s n realnih nepoznanica $x_1, \ldots, x_n$. Realne brojeve a_{ij}, gdje je $i \in \{1, 2, \ldots, m\}, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, zovemo **koeficijenti** sustava, dok realne brojeve $b_1, b_2, \ldots, b_m$ zovemo **slobodni članovi** sustava. Očito je da sve informacije o sustavu nose upravo ovi brojevi. U primjenama pojavljuju se sustavi koji imaju i po nekoliko stotina jednaždbi i nepoznanica. Radi praktičnijeg zapisivanja ovakvih sustava uvedeno je tabelarno zapisivanje koeficijenata i slobodnih članova.

Pravokutnu tablicu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

zovemo **matrica sustava**, a tablicu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

proširena matrica sustava. Ako definiramo **matricu slobodnih članova**

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

te **matricu nepoznanica**

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

naš linearni sustav može se zapisati jednostavno kao:

$$AX = B$$

Iz gornje formule slijedi da, ako je matrica sustava A regularna, rješenje postoji, jedinstveno je i dano sa

$$X = A^{-1}B$$

Zadatak 1 *Nalaženjem inverzne matrice riješite sljedeći sustav:*

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 2 \\ x + 2y - z &= 1 \\ -4x + 4y + z &= 1 \end{aligned}$$

Rješenje: Matrični zapis našeg sustava je:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dakle, tražimo inverz matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Primjenom metode iz lekcije "Algebra matrica" tj. nalaženjem adjunkte vidimo da je inverz matrice A matrica

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Sada dobivamo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zadatak 2 *Nalaženjem inverzne matrice riješite sljedeći sustav:*

$$\begin{aligned} -x + y + z &= 3 \\ x + z &= 2 \\ x + 2y - z &= 1 \end{aligned}$$

Regularni sustavi mogu se riješavati i tzv. Cramerovim pravilom. Označimo stupce matrice A sada redom slovima $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, ..., $\mathbf{a_n}$, a stupac matrice B s $\mathbf{b}$. Ako je matrica A sustava $A \cdot X = B$ invertibilna, onda je rješenje sustava jedinstveno i dano sa

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \ldots \quad x_n = \frac{D_n}{D},$$

gdje je $D = \det[\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}] = \det A$, $D_1 = \det[\mathbf{b}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}]$, ..., $D_n = \det[\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{b}]$, tj. determinante $D_1, D_2, \ldots, D_n$ su determinante matrica koje su dobivene tako da se u matricu A ubacuje stupac $\mathbf{b}$ umjesto stupca $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}$, redom.

Zadatak 3 *Pomoću Cramerovog pravila riješite slijedeći sustav:*

$$\begin{aligned} x + 2y - z + u &= -1 \\ 2x + 5y - z + 2u &= -2 \\ 3x - y - 2z + u &= 5 \\ x - y + 3z - 5u &= 6. \end{aligned}$$

Rješenje: Sustav najprije zapisujemo matrično:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Treba izračunati determinantu $D = \det A$ (A je matrica sustava) - dobije se $D = -34$ (ostavljamo za vježbu). Dalje, računamo determinantu matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix},$$

koja se dobije tako da se prvi stupac matrice A zamijeni stupcem matrice B (B je matrica slobodnih koeficijenata). Dobije se $D_1 = -68$. Analogno postupamo za ostala tri stupca matrice A - determinante matrica koje tako dobivamo redom iznose $D_2 = 34, D_3 = -34, D_4 = 0$, što prema Cramerovom pravilu daje konačno rješenje sustava: $x_1 = \frac{-68}{-34} = 2, x_2 = \frac{34}{-34} = -1, x_3 = \frac{-34}{-34} = 1, x_4 = \frac{0}{-34} = 0$.

Zadatak 4 *Cramerovim pravilom riješite sustav:*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Zadatak 5 *Cramerovim pravilom riješite sustav:*

$$\begin{aligned} x + 2y - z + u &= 0 \\ 2x + 5y - z + 2u &= 1 \\ 3x - y - 2z + u &= 2 \\ x - y + 3z - 5u &= 3. \end{aligned}$$

Determinante potrebne za Cramerovo pravilo i determinante općenito mogu se osim razvojem po nekom retku (ili stupcu) računati i pomoću elementarnih transformacija. Naime, vrijedi:

(1) Ako svi elementi nekog stupca ili nekog retka matrice A iščezavaju, onda je $\det A = 0$.

(2) Ako dva stupca ili dva retka determinante zamijene mjesta, ona mijenja predznak.

(3) Ako matrica ima dva stupca ili dva retka jednaka, onda je $\det A = 0$.

(4) Ako stupac ili redak matrice A pomnožimo sa nekim realnim brojem k, onda je determinanta nove matrice B jednaka k puta determinanta stare matrice, tj. $\det B = k \det A$.

(5) Ako nekom stupcu ili retku matrice A dodamo linearnu kombinaciju ostalih redaka (stupaca), determinanta se ne mijenja.

Zadatak 6 *Koristeći gornja svojstva nađite svođenjem na trokutastu formu det A gdje je:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Rješenje: Imamo redom:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =_{(1)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} =_{(2)} -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} =_{(3)} -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -3\left(-\frac{1}{3}\right) = 1$$

gdje smo u

(1) prvi redak množili s -2 i dodali drugom pa zatim s -3 i dodali trećem kako bi postigli nule u prvom stupcu,

(2) izlučili -3 iz drugog retka kako bi na drugom mjestu dobili 1 s kojim ćemo poništiti -4 u trećem redu

(3) množili drugi redak s 4 i dodali trećem.

Determinanta je na kraju imala gornju trokutastu formu pa je bilo dovoljno samo izmnožiti elemente na dijagonali da je izračunamo.

Zadatak 7 *Koristeći svojstva determinante svedite det A na gornju trokutastu formu te zatim provjerite da je jednaka nuli ako je*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 8 & -7 & 2 & 1 & -4 \\ -4 & 2 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformacije koje smo koristili prilikom računanja determinante zovu se elementarne transformacije i vrlo su korisne kod još dva tipa problema: traženja inverza matrice i rješavanja lineranih sustava. Popišimo ih:

Elementarne matrične transformacije:

(1) zamjena dvaju redaka (stupaca)

(2) množenje jednog retka (stupca) realnim brojem različitim od nule

(3) dodavanje jednog retka (stupca) pomnoženog realnim brojem drugom retku (stupcu)

Kad tražimo inverz matrice A, gornjim transformacijama je svodimo na jediničnu matricu, a istovremeno sve što radimo s A radimo i sa jediničnom matricom. Rezultat je inverzna matrica A^{-1}.

Zadatak 8 *Za matricu* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *izračunajte* A^{-1}.

Rješenje:

$$\begin{aligned} (A|I) &= \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim^1 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim^2 \\ &\sim^2 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim^3 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim^4 \\ &\sim^4 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) = (I|A^{-1}), \end{aligned}$$

gdje su redom primjenjene sljedeće transformacije:

(1) zamjena prvog i drugog retka

(2) prvi redak pomnožen s -2 i dodan drugom retku

(3) drugi redak pomnožen s 2 i dodan prvom retku

(4) prvi redak pomnožen s -1.

Odavdje jednostavno pročitamo desni dio matrice $(I|A^{-1})$ - to je inverzna matrica:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zadatak 9 *Koristeći transformacije matrica odredite inverz sljedećih matrica:*

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$

Kada radimo s linearnim sustavim, postupak je vrlo sličan; proširena matrica sustava se analognim transformacijama svodi na gornji (donji) trokutasti ili dijagonalni oblik iz kojeg se onda lako očita rješenje. Pri tome se smiju koristiti samo transformacije na retcima, manipuliranje sa stupcima nije dozvoljeno. To je tzv. Gauss-Jordanova metoda.

Zadatak 10 *Gaussovom metodom riješite sustav:*

$$\begin{aligned} 5x + 4z + 2t &= 3 \\ x - y + 2z + t &= 1 \\ 4x + y + 2z &= 1 \\ x + y + z + t &= 0. \end{aligned}$$

Rješenje: Napravimo proširenu matrcu sustava i transformiramo:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim^1 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim^2$$

$$\sim^2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim^3 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim^4$$

$$\sim^4 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -3 & 4 \end{array}\right) \sim^5 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim^6$$

$$\sim^6 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim^7 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim^8$$

$$\sim^8 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

gdje su redom korištene sljedeće transformacije:

(1) zamjena prvog i četvrtog retka (kako bismo u gornjem lijevom kutu imali jedinicu, što je standardni početak rješavanja sustava putem elementarnih transformacija - želimo na kraju imati dijagonalnu formu s jedinicama na dijagonali!)

(2) prvi redak pomnožen redom s -1, -4 i -5 i dodan redom drugom, trećem i četvrtom retku (želja nam je dobiti nule na svim nedijagonalnim elementima)

(3) zamjena drugog i trećeg stupca (kako bismo kao drugi dijagonalni element - na presjeku drugog retka i drugog stupca - također imali jedinicu) - bitno je ovdje primjetiti da su time varijble y i z zamijenile mjesta. Naime, varijabli y sada pripada treći, a varijabli z drugi stupac.

(4) drugi redak pomnožen redom s -1, 2 i 1 i dodan redom prvom, trećem i četvrtom retku (vidi napomenu uz (2))

(5) treći redak pomnožen s -1 i dodan četvrtom retku (kako bismo dobili nulu na jedinom preostalom nedijalgonalnom elementu četvrtog retka i jedinicu na dijagonalnom elementu)

(6) četvrti redak pomnožen redom s -1 i 4 i dodan redom prvom i trećem retku (vidi napomenu uz (2))

(7) treći redak podijeljen s -7 (kako bi na dijagonalnom elementu trećeg retka dobili jedinicu)

(8) treći redak pomnožen redom s -3 i 2 i dodan redom prvom i drugom retku (vidi napomenu uz (2))

Ovim postupkom dolazimo do proširene matrice sustava koji je ekvivalentan početnom, pa ima isto rješenje. Međutim, rješenje ovog sustava možemo jednostavno pročitati iz proširene matrice koju smo dobili (uz napomenu da su y i z zamijenili mjesta): $x = 1$, $z = -1$, $y = -1$, $t = 1$, pa uređena četvorka $(1, -1, -1, 1)$ čini jedinstveno rješenje početnog sustava.

Zadatak 11 *Gaussovom metodom riješite sustav:*

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + x_4 - 2x_5 &= 0\\
-x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1\\
8x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 - 4x_5 &= 2\\
-4x_1 + 2x_2 - 2x_4 + 4x_5 &= 0\\
x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 1.
\end{aligned}$$

Zadatak 12 *Gaussovom metodom riješite sustav:*

$$\begin{aligned}
4x - y + z + 2u &= 14\\
2x + y - 3u &= 2\\
x - y + 2z + u &= 3\\
2x + y + z - 4u &= 0.
\end{aligned}$$

Zadatak 13 *Gaussovom metodom riješite sustav:*

$$\begin{aligned}
-3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= -11\\
-2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 3\\
4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= -2\\
4x_1 - 2x_2 + 9x_3 - x_4 &= -33.
\end{aligned}$$

Poglavlje 1

Funkcije

Neka su X i Y dva neprazna skupa. Ako je po nekom pravilu, označimo ga sa f, svakom elementu x iz X pridružen točno jedan element y iz Y, kažemo da je na skupu X zadana funkcija f sa vrijednostima u Y. To simbolički označavamo sa $f : X \longrightarrow Y$.

Skup X nazivamo *područje definicije* ili *domena* funkcije f, a skup Y *područje vrijednosti* ili *kodomena* of f. Vrijednost x zovemo ponekad *varijabla.* Ako je kodomena funkcije f podskup skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$, kažemo da je f *realna* funkcija.

Neka je zadana funkcija $f : X \longrightarrow Y$. Podskup skupa Y,

$$f(X) = \{y|y = f(x), \quad x \in X\}$$

zove se *slika funkcije* f.

Graf realne funkcije realne varijable $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ je skup točaka ravnine $\Gamma_f = \{(x, f(x)) = x \in X\}$.

Zadatak 1 *Izračunajte* $f(-1), f(0), f(1), f(3)$ *i* $f(5)$ *ako je* $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$.

Rješenje: Redom uvrštavamo zadane vrijednosti na mjesto varijable x u pravilu pa imamo:

i) $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 2(-1) - 5 = -1 - 3 - 2 - 5 = -11$

ii) $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 5 = -5$

iii) $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 5 = 1 - 3 + 2 - 5 = -5$

Zadatak 2 *Neka je* $f(x) = 2x + 3$. *Odredite:*

(a) $f(-2), f(1)$ *i* $f(\frac{1}{4})$,

(b) $f(a^2)$,

(c) $f^2(a)$,

(d) $f(1) - f(-1)$ i $f(a^2+1) - f^2(a+1)$.

Rješenje:

(b) $f(a^2) = 2a^2 + 3$

(c) $f^2(a) = (2a+3)^2$

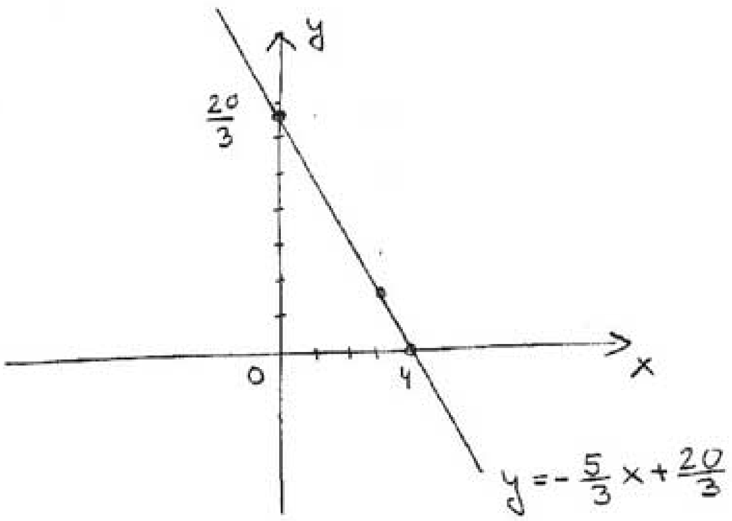
Zadatak 3 *Odredite* $f(0), f(-1)$ *i* $\frac{1}{x^2} f(\frac{1}{x})$ *ako je* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Funkcije oblika $f(x) = ax + b$ nazivamo linearne funkcije. Njihov je graf pravac $y = ax + b$.

Zadatak 4 *Odredite linearnu funkciju* $f(x) = ax + b$ *i nacrtajte njen graf ako je*

(a) $f(-2) = 10$ *i* $f(1) = -5$,

(b) $f(-3) = 3$ *i* $f(b) = 0$.



Slika 1: graf funkcije $f(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{20}{3}$ je pravac

Rješenje:

(a) $f(-2) = 10 \;\Rightarrow\; a(-2) + b = 10, \quad f(1) = 5 \;\Rightarrow\; a + b = 5$

Dakle, rješavamo sustav $-2a + b = 10,\ a + b = 5$ što daje $a = -\frac{5}{3},\ b = \frac{20}{3}$ pa je tražena funkcija $f(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{20}{3}$.

Zadatak 5 *Odredite kvadratnu funkciju* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *ako je:*

(a) $f(-1) = -1, f(3) = -3$ *i* $f(6) = 12$,

(b) $f(-\sqrt{2}) = -4, f(2) = -5$ *i* $f(2\sqrt{2}) = -7$.

Zadatak 6 *Neka je dano pridruživanje:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0,1] \\ 3x, & x \in [1,2]. \end{cases}$$

Da li je f funkcija?

Rješenje: Dano pridruživanje nije funkcija jer po pravilu za interval $[0,1]$ imamo $f(1) = 2$ a po pravilu za interval $[1,2]$ slijedi da je $f(1) = 3$ što znači da su broju 1 pridružene dvije različite vrijednosti.

Zadatak 7 *Izračunajte* $f(x+1)$ *ako je* $f(x-1) = x^2$.

Rješenje: Problem je što umjesto $f(x)$ imamo zadano $f(x-1)$. Zato radimo supstituciju $t = x - 1 \;\Rightarrow\; x = t + 1$ pa dobivamo $f(t) = (t+1)^2$ iz čega slijedi da je $f(x+1) = (x+1+1)^2 = (x+2)^2$.

Funkcije mogu imati različita svojstva. Za funkciju $f : X \longrightarrow Y$ kažemo da je *injekcija* ako za bilo koja dva elementa $x_1, x_2 \in X$ iz $x_1 \neq x_2$ slijedi $f(x_1) \neq f(x_2)$ ili, ekvivalentno tome, ako iz $f(x_1) = f(x_2)$ slijedi $x_1 = x_2$. Ako je $f(X) = Y$, tj. ako za svako $y \in Y$ postoji $x \in X$ tako da je $f(x) = y$, kažemo da je f *surjekcija*. Za funkciju koja je istovremeno i surjekcija i injekcija, kažemo da je *bijekcija*.

Zadatak 8 *Provjerite injektivnost slijedećih funkcija* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *:*

(a) $f(x) = 3$, *(b)* $f(x) = 2x+1$, *(c)* $f(x) = 3x^2+1$, *(d)* $f(x) = x^3$.

Rješenje:

(a) Ova funkcija očito nije injektivna jer je $f(x) = 3$ za svako x pa možemo npr. uzeti $x_1 = 1,\ x_2 = 2$ i imamo $f(x_1) = f(x_2)$ iako je $1 \neq 2$.

(b) Koristit ćemo drugi kriterij injektivnosti da pokažemo da je ova linearna funkcija injektivna. Želimo da iz $f(x_1) = f(x_2)$ slijedi $x_1 = x_2$. Imamo

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \;\Rightarrow\; 2x_1 = 2x_2 \;\Rightarrow x_1 = x_2$$

pa je to injektivna funkcija. Općenito vrijedi da su linearne funkcije injektivne.

(c) Kako je $(-x)^2 = x^2$ lako ćemo naći primjer koji pokazuje da kvadratna funkcija $f(x) = 3x^2 + 1$ nije injektivna. Uzmemo $x_1 = 1$ i $x_2 = -1$ pa imamo $f(1) = 3 \cdot 1^2 + 1 = 4$ i s druge strane $f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 1 = 4$. Jer je $1 \neq -1$ pokazali smo da funkcija nije injektivna.

Injektivnost funkcije se ponekad može postići restrikcijom domene.

Zadatak 9 *Restringirajte domenu slijedeći funkcija* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tako da one postanu injektivne:*

$$(a) \quad f(x) = x^2, \qquad (b) \quad f(x) = |x+1|, \qquad (c) \quad f(x) = \sin x$$

Rješenje:

(a) Ovdje možemo uzeti npr. samo pozitive x-eve odnosno domenu sa $\mathbb{R}$ restringirati na $\mathbb{R}_+ = \{ \ x \geq 0 \ | x \ \in \mathbb{R} \ \}$. Sada imamo:

$$f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow \ x_1^2 = x_2^2 \ \Rightarrow \ |x_1| = |x_2| \ \Rightarrow x_1 = x_2$$

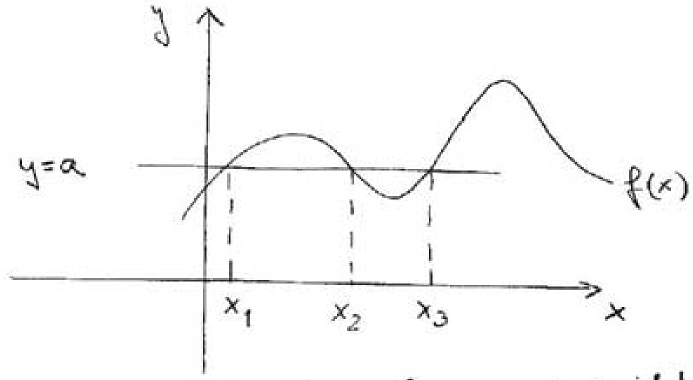
jer su x_1 i x_2 pozitivni pa $|x_1| = x_1$ i $|x_2| = x_2$.

Zadatak 10 *Neka je* $f(x) = x^2 + 1$. *Odredite* Y *tako da* $f : \mathbb{R} \longrightarrow Y$ *bude surjekcija.*

Rješenje: Ako je $f : \mathbb{R} \longrightarrow Y$ surjekcija onda za svako $y \in Y$ mora postojati $x \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x) = y$. To znači da je $y = x^2 + 1$. Jer je $x^2 \geq 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$ slijedi da je $y = x^2 + 1 \geq 1$. Prema tome, ako definiramo $Y = [1, +\infty)$ imamo surjektivnost jer u tom slučaju za dani y odgovarajući x ima oblik $\sqrt{y-1}$.

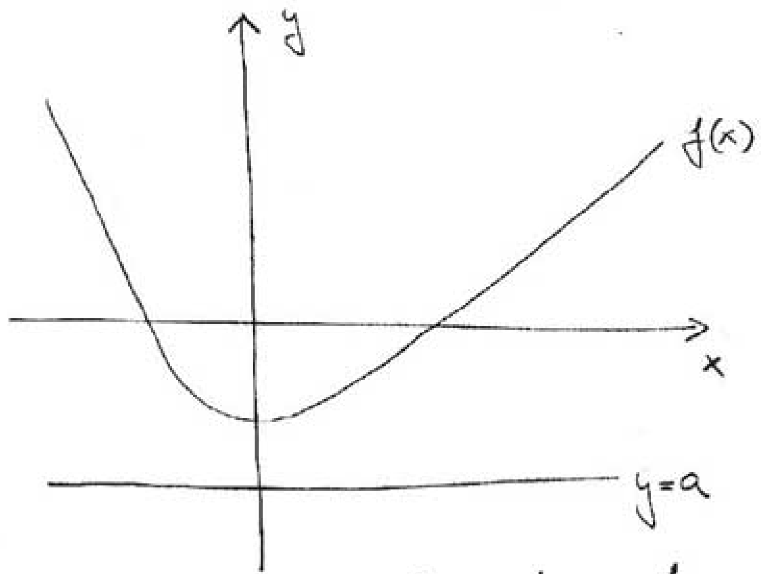
Surjektivnost i injektivnost se lako mogu vidjeti iz grafa funkcije:

(i) injektivnost: povlačimo pravce paralelene s x-osi, tj. pravce oblika $y = b$. Ako graf funkcije presiječemo s nekim takvim pravcem u više od jedne točke to znači da funkcija nije injektivna. Naime, te točke presjeka imaju koordinate (x_1, b) i (x_2, b) gdje je $x_1 \neq x_2$. Jer leže na grafu slijedi da je $f(x_1) = f(x_2) = b$ (vidi sliku 2.)



Slika 2: graf funkcije koja nije injektivna; pravac $y=a$ siječe graf u tri točke pa $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=a$ dok je istovremeno $x_1 \neq x_2$, $x_2 \neq x_3$, $x_1 \neq x_3$

(ii) surjektivnost: ponovno povlačimo pravce paralelne s x-osi tj, one oblika $y = b$ za neko b. Ako nađemo b takav da je b u kodomeni Y zadane funkcije f, ali pravac $y = b$ ne siječe graf te funkcije, to znači da dana funkcija $f : X \longrightarrow Y$ nije surjektivna. Naime, za taj $b \in Y$ nema odgovarajućeg $x \in X$ takvog da $f(x) = b$ jer bi inače pravac $y = b$ sijekao graf u točki $(x, f(x)) = (x, b)$. (vidi sliku 3.)



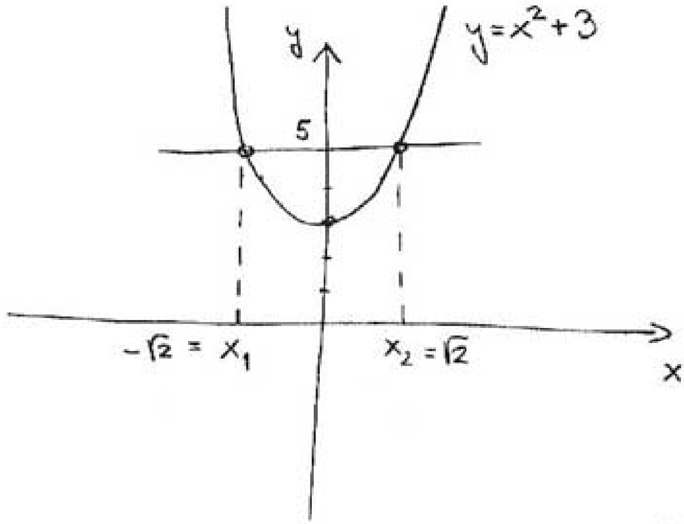
Slika 3: ako funkciju f gledamo kao funkciju sa $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$, onda ona očito nije surjektivna jer pravac $y=a$ ne siječe njen graf $\Rightarrow$ ne postoji $x \in \mathbb{R}$ t.d. $f(x)=a$

Zadatak 11 *Provjerite grafički injektivnost i surjektivnost slijedećih funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:*

(a) $f(x) = x^2 + 3$, *(b)* $f(x) = |x + 1|$, *(c)* $f(x) = x + 3$

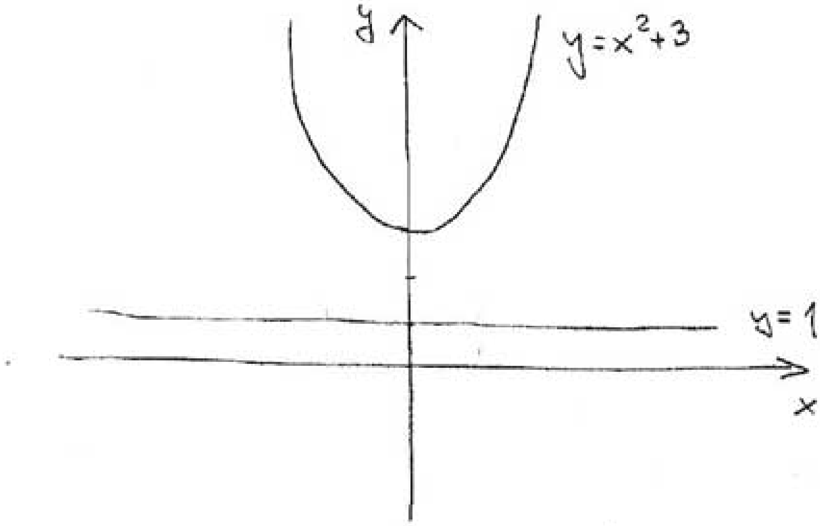
Rješenje:

(a) Gledamo da li možemo naći pravac oblika $y = b$ koji bi sjekao naš graf u barem dvije točke, uzmemo npr. $y = 5$ i vidimo da funkcija nije injektivna.



Slika 4: različiti x_1 i x_2 sa svojstvom da $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow f$ nije injektivna

Sada tražimo $y = b$ takav da ne siječe graf niti u jednoj točki, to je npr $y = 1$ pa f nije ni surjektivna.



Slika 5: pravac $y=1$ nigdje ne siječe graf pa f nije surjektivna

Neka su zadane dvije funkcije, $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y_1 \longrightarrow Z$ uz uvjet $Y \subset Y_1$. Funkcija koja svakom elementu $x \in X$ pridružuje element $g(f(x)) \in Z$ zove se kompozicija funkcija f i g i označava sa $g \circ f$. Dakle, po definiciji je

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Neka je sada $f : X \longrightarrow Y$ bijekcija. Onda za svaki element $y \in f(x)$ postoji jedinstveni $x \in X$ takav da je $y = f(x)$. To nam omogućuje da definiramo novu funkciju, f^{-1}. Funkcija $f^{-1} : f(X) \longrightarrow X$ koja svakom elementu $y \in f(X)$ pridružuje $x \in X$ sa svojstvom da $f(x) = y$ zove se inverzna funkcija polazne funkcije f. Primjetimo da vrijedi:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \qquad \text{i} \qquad (f \circ f^{-1}) = f(f^{-1}(y)) = y$$

pa je

$$f^{-1} \circ f = id_X \qquad \text{i} \qquad f \circ f^{-1} = id_Y.$$

Zadatak 12 *Neka je $f(x) = x^3 - x$. Odredite:*

$$(a) \quad f \circ f, \qquad (b) \quad (f \circ (f \circ f))(-1).$$

Zadatak 13

(i) *Neka je $f(x) = x + 2$, $g(x) = 3 - x^2$. Da li vrijedi $f \circ g = g \circ f$? Za koje $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$?*

(ii) *Neka je $f(x) = x + 2$, $g(x) = 1 - \sqrt{x}$ i $h(x) = x^2 + 3$. Provjerite: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.*

Navedena tvrdnja, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, vrijedi za sve funkcije f, g i h za koje su te kompozicije dobro definirane, tj. operacija kompozicije ima svojstvo asocijativnosti.

Zadatak 14 *Za funkciju $f(x)$ izračunajte inverznu funkciju ako je*

(a) $f(x) = x^2 - 1$,

(b) $f(x) = \log \frac{x}{2}$,

(c) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$,

(d) $f(x) = (5 + 3^x)^2$.

Rješenje:

(a) Prvo trebamo odrediti područje na kojem je zadana funkcija bijektivna. Imamo $x^2 - 1 \geq -1$ pa ćemo kodomenu ograničiti na $[-1, +\infty)$. Ako domenu ograničimo na $x \geq 0$ imamo i injektivnost: $x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$ jer $|x| = x$ ako $x \geq 0$. Stoga promatramo $f : [0, +\infty) \longrightarrow [-1, +\infty)$ i tu se inverz dobiva na slijedeći način: stavimo $y = x^2 - 1 \Rightarrow y + 1 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y - 1}$ pa je $f^{-1}(y) = \sqrt{y - 1}$. To je, zbog ograničenja kodomene na $[-1, +\infty]$ dobro definirano (vidi sliku).

(b) Domena ove funkcije je $x > 0$ zbog svojstava logaritma. Iz istih razloga je kodomena čitav $\mathbb{R}$. Injektivnost imamo na čitavoj domeni jer $\log\frac{x_1}{2} = \log\frac{x_2}{2} \Rightarrow 10^{\log\frac{x_1}{2}} = 10^{\log\frac{x_2}{2}} \Rightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{2} \Rightarrow x_1 = x_2$. Znači, imat ćemo $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ i nalazimo je na sljedeći način: $y = \log\frac{x}{2} \Rightarrow 10^y = 10^{\log\frac{x}{2}} \Rightarrow 10^y = \frac{x}{2}$ pa $2 \cdot 10^y = x$ i konačno $f^{-1}(y) = 2 \cdot 10^y$.

Graf inverzne funkcije dobijemo tako da preslikmo graf početne funkcije oko pravca $y = x$.

Zadatak 15 *Nacrtajte graf inverzne funkcije ako je početna funkcija zadana s:*

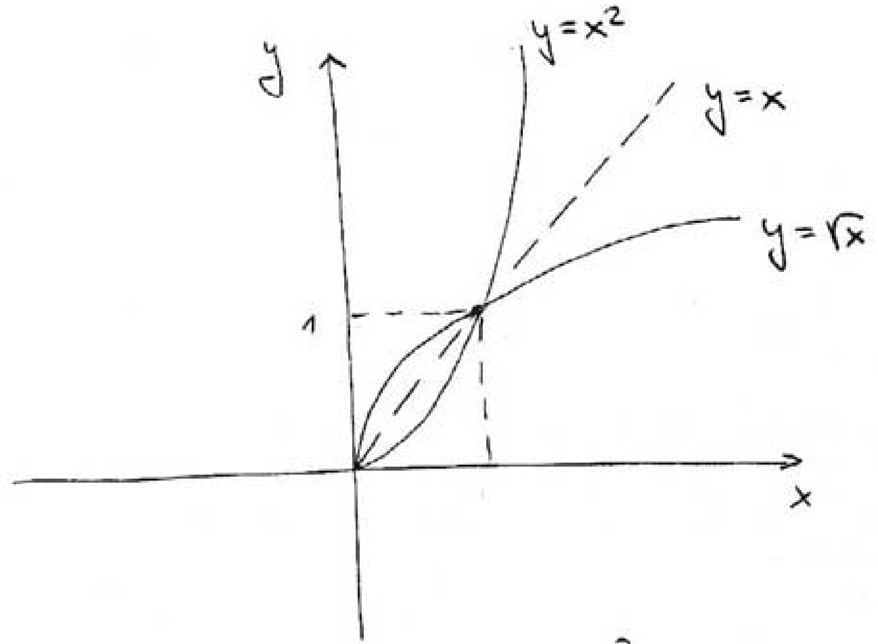
(a) $f(x) = x^2$

(b) $f(x) = -x + 1$

(c) $f(x) = x^3 - 1$

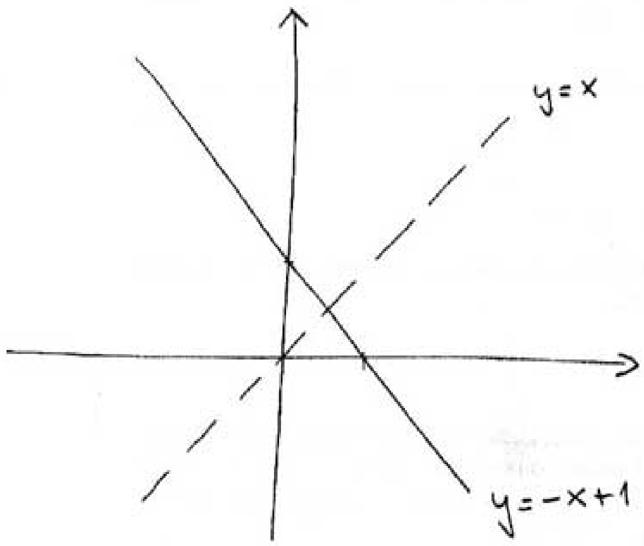
Rješenje:

(a) Funkcija $f(x) = x^2$ bijektivna je ako joj npr. ograničimo domenu na $x \geq 0$ a kodomenu na $y \geq 0$. Tu je inverz dan sa $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$:



Slika 6: parabolu $y=x^2$, $x \geq 0$ smo preslikali oko pravca $y=x$ i dobili graf inverzne funkcije $y=\sqrt{x}$

(b) Linearne funkcije su sve bijektivne pa možemo odmah tražiti inverz: $y = -x + 1 \;\Rightarrow\; y - 1 = -x \;\Rightarrow x = -y + 1$ i dobivamo $f^{-1}(y) = -y + 1$. Zaključujemo da je graf inverzne funkcije istovjetan grafu početne funkcije:



Slika 7: pravac $y=-x+1$ se preslikavanjem oko pravca $y=x$ preslika sam u sebe pa zaključimo da je inverzna funkcija od $f(x)=-x+1$ upravo ona sama.

Funkciju $f(x)$ definiranu u simetričnom području $-l < x < l$ (ovdje $l \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$) nazivamo parnom ako je $f(-x) = f(x)$ i neparnom ako je $f(-x) = -f(x)$ za svako x iz domene od f.

Zadatak 16

Odredite parnost ili neparnost slijedećih funkcija:

(a) $f(x) = x^2 - x^4$,

(b) $f(x) = \sin(\cos x)$,

(c) $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}$,

(d) $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$,

(e) $f(x) = \frac{|x|+1}{(1-x^2)\sin x}$,

(f) $f(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$.

Rješenje:

(a) Jednostavno uvrsštavamo $-x$ umjesto x i imamo:

$$f(-x) = (-x)^2 - (-x)^4 = x^2 - x^4 = f(x)$$

što pokazuje da je funkcija parna.

(b) $f(-x) = \sin(\cos(-x)) = \sin(\cos x) = f(x)$
i vidimo da je f parna funkcija jer je cos paran.

(c) $f(-x) = \sqrt{1 + (-x) + (-x)^2} - \sqrt{1 - (-x) + (-x)^2} = \sqrt{1 - x + x^2} - \sqrt{1 + x + x^2} = -(-\sqrt{1 - x + x^2} + \sqrt{1 + x + x^2}) = -f(x)$
pa je f neparna funkcija.

Parnost ili nepranost se isto može isčitati iz grafa funkcije; graf parne funkcije je simetričan s obzirom na os y, a graf neparne dobijemo tako da nacrtamo funkciju na području $x \geq 0$, preslikamo dobiveno prvo oko osi y pa onda oko osi x (vidi sliku)

Zadatak 17 *Odredite pomoću grafa parnost ili neparnost slijedećih funkcija*

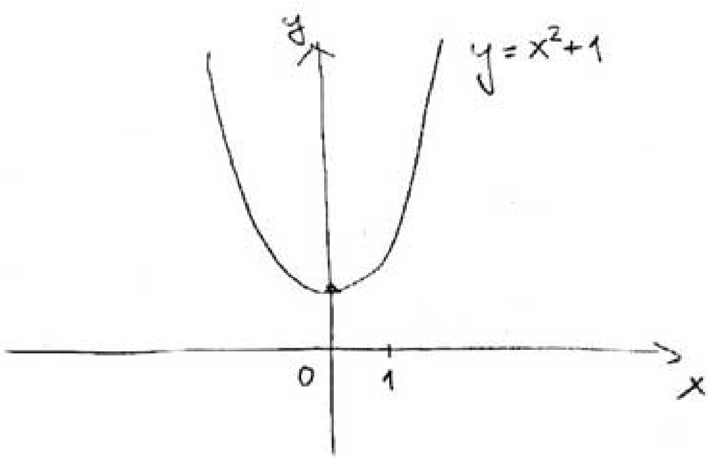
(a) $f(x) = x^2 + 1$

(b) $f(x) = x^3$

(c) $f(x) = \sin x$

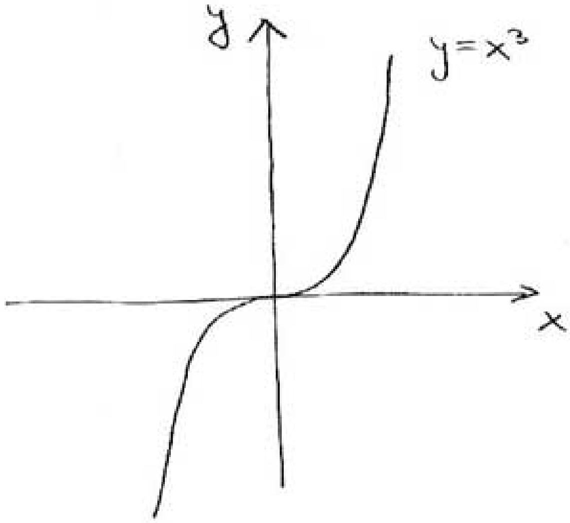
Rješenje:

(a) Graf je očito simetričan s obzirom na os y (vidi sliku) pa zaključujemo da je funkcija parna.



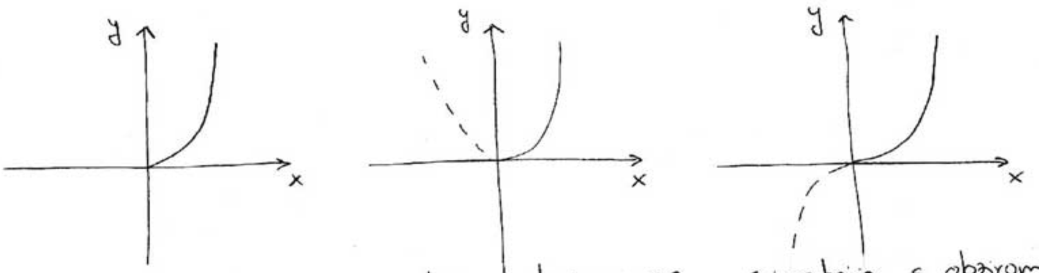
Slika 8

(b) Graf funkcije $f(x) = x^3$:



Slika 9

Iz slike je jasno da dio grafa za $x < 0$ možemo dobiti tako da graf za $x \geq 0$ preslikamo oko osi y pa zatim oko osi x. Stoga je to neparna funkcija.



$f(x) = x^3$ i $x \geqslant 0$ simetrija s obzirom na os y simetrija s obzirom na os x daje graf

Vježbe iz Matematike 1.

9. i 10. Elementarne funkcije. Funkcije važne u primjenama

Zadatak 1 Napišite po jedan primjer za rastuću i padajuću linearnu funkciju.

Zadatak 2 Nađite linearnu funkciju čiji graf prolazi točkama $(0,1)$ i $(1,-1)$. Je li ta funkcija rastuća ili padajuća? Napišite još tri točke kojima prolazi graf te funkcije.

Rješenje: Znamo da svaka linearna funkcija ima oblik $f(x) = ax + b$, gdje su a i b parametri (a je koeficijent smjera, a b odsječak na osi y). Pripadna veza između x i y koordinate glasi stoga $y = ax + b$. Uvrštavanjem zadanih točaka dobivamo sljedeći sustav od dvije jednadžbe u nepoznanicama a i b:

$$\begin{aligned} b &= 1 \\ a + b &= -1, \end{aligned}$$

rješavanjem kojeg odmah dobivamo da je $a = -2$, $b = 1$, pa tražena linearna funkcija glasi $f(x) = -2x + 1$. Kako je koeficijent smjera negativan, funkcija je padajuća.

Da bismo napisali još tri točke kojima prolazi graf te funkcije, dovoljno je u $y = -2x + 1$ uvrstiti neke tri vrijednosti za x (recimo $x = 2$, $x = 3$ i $x = 4$) i izračunati odgovarajući y).

Zadatak 3 Je li funkcija iz prethodnog zadatka bijekcija? Ako jest, nađite i nacrtajte grafove funkcija f i f^{-1}.

Rješenje: Da bismo dokazali da je funkcija $f(x) = -2x + 1$ bijekcija, treba pokazati da je injekcija i surjekcija:

(i) **f je injekcija:** mora vrijediti da za sve x_1 i x_2 takve da je $f(x_1) = f(x_2)$ nužno slijedi da je i $x_1 = x_2$. Računamo:

$$-2x_1 + 1 = -2x_2 + 1 \Rightarrow -2x_1 = -2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

i funkcija je očito injekcija.

(ii) **f je surjekcija:** mora vrijediti da za svaki $y_0 \in \mathbb{R}$ postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x_0) = y_0$, što znači $-2x_0 + 1 = y_0$. No, odavdje možemo lako izračunati x_0:

$$-2x_0 + 1 = y_0 \Rightarrow -2x_0 = y_0 - 1 \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}.$$

Dakle, traženi x_0 je $x_0 = -\frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}$. Da je to dobar x_0 gotovo je očito, ali ipak provjeravamo da je $f(x_0) = y_0$:

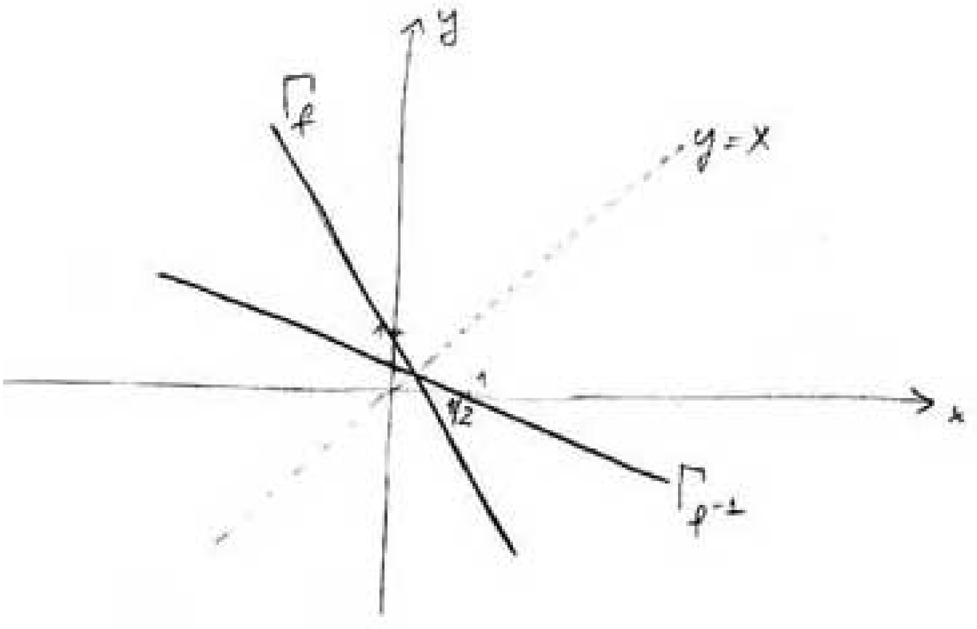
$$f(x_0) = -2x_0 + 1 = -2(-\frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}) + 1 = y_0 - 1 + 1 = y_0,$$

što je i treablo dobiti. Ovu operaciju možemo obaviti za sve $y_0 \in \mathbb{R}$, pa je f očito surjekcija.

Dakle (jer je i injektivna i surjektivna) f je bijekcija, pa ima inverznu funkciju f^{-1}:

$$f(x) = -2x+1 \Rightarrow x = -2f^{-1}(x)+1 \Rightarrow 2f^{-1}(x) = -x+1 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.$$

Još treba nacrtati grafove funkcija f i f^{-1}, što nije teško budući da su oni pravci. Koristimo pri crtanju informacije kao što su odsječak na osi y i koeficijent smjera. Primijetite da se graf funkcije f^{-1} dobiva zrcaljenjem grafa funkcije f obzirom na simetrali I i III kvadranta - pravac $y = x$:



Zadatak 4 Nađite kvadratnu funkciju čiji graf prolazi točkama $(0, 1)$, $(1, 1)$ i $(-1, 3)$. Izračunajte koordinate točke tjemena. Je li to tjeme u ovom slučaju točka lokalnog minimuma ili maksimuma? Nađite intervale rasta i pada ove funkcije, te napišite još tri točke kojima prolazi graf te funkcije.

Rješenje: Slično kao kod linearne funkcije, treba odrediti parametre koji definiraju kvadratnu funkciju. Kako se radi o funkciji $f(x) = ax^2 + bx + c$, vidimo da treba odrediti tri parametra, pa je za očekivati da će biti potrebno zadati i tri točke kroz koje graf funkcije mora prolaziti. Uvrštavanjem vrijednosti koordinata te tri točke u $y = ax^2 + bx + c$ dobivamo sustav

$$\begin{aligned} c &= 1 \\ a + b + c &= 1 \\ a - b + c &= 3, \end{aligned}$$

čije rješenje glasi: $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$. Dakle, kvadratna funkcija koju smo tražili je $f(x) = x^2 - x + 1$.

Kako je koeficijent a pozitivan, graf ove kvadratne funkcije će biti kokavna parabola ("okrenuta prema gore"), pa će točka tjemena biti točka lokalnog minimuma. Računamo je prema formuli

$$T(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}),$$

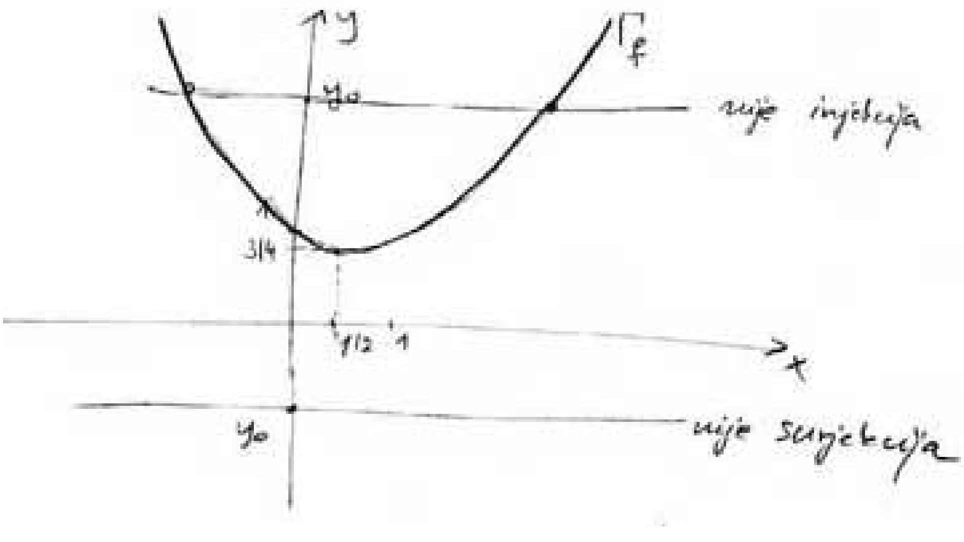
gdje je $D = b^2 - 4ac$ (tzv. "diskriminanta"). Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti za a, b i c izlazi da je $T = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ - to je dakle točka tjemena, ali ujedno i lokalnog minimuma.

U skladu lako se vidi (iz koveksnog oblika grafa i poznavanja točke tjemena) da funkcija pada na intervalu $< -\infty, \frac{1}{2} >$, a raste na intervalu $< \frac{1}{2}, \infty >$.

Da nađemo još tri točke kojima prolazi graf ove funkcije dovoljno je izabrati tri vrijednosti za x i uvrstiti ih u $y = x^2 - x + 1$ da dobijemo odgovarajuće vrijednosti za y.

Zadatak 5 Provjerite korištenjem garfa funkcije f iz prethodnog zadatka je li f bijekcija ako zadamo da su domena i kodomena čitav skup realnih brojeva? Ako nije, kako treba ograničiti kodomenu da ona postane surjekcija? Kako treba ograničiti domenu da ona postane injekcija?

Rješenje: Funkcija nije bijekcija, u što se možemo lako uvjeriti ako nacrtamo njen graf:



Naime, funkcija će biti bijekcija ako za svaki y_0 iz kodomene (svaki $y_0 \in \mathbb{R}$, tj. s $y-$osi) možemo naći **točno** jedan x_0 iz domene (točno jedan $x_0 \in \mathbb{R}$, tj. s $x-$osi) takav da je $f(x_0) = y_0$. To provjeravamo tako da povlačimo kroz y_0 pravac okomit na $y-$os, tražimo sjecište s grafom funkcije f i iz točke sjecišta povlačimo pravac okomit na $x-$os - na mjestu gdje taj pravac siječe $x-$os bi trebao biti traženi x_0. Dok je kod linearne funkcije takav postupak moguće provesti za svaki izbor y_0 s $y-$osi, lako vidimo da ovdje postoje sljedeći problemi:

(i) **f nije surjektivna:** za sve $y_0 < \frac{3}{4}$ (dakle, sve y_0 koji se nalaze "ispod" točke na $y-$ osi koja predstavlja $y-$koordinatu točke tjemena T) nije moguće provesti gore opisani postupak, jer pravac kroz takav y_0 okomit na $y-$os uopće neće sijeći graf funkcije f

(ii) **f nije injektivna:** za svaki $y_0 > \frac{3}{4}$ (dakle, sve y_0 koji se nalaze "iznad" točke na $y-$ osi koja predstavlja $y-$koordinatu točke tjemena T) pravac kroz y_0 okomit na $y-$os siječe graf funkcije f, ali ne u točno jednoj točki, već uvijek u dvije točke, što se kosi s defincijom injektivnosti.

Dakle, f nije bijekcija (kao, uostalom, niti jedna druga kvadratna funkcija). Međutim, moguće je **ograničiti** domenu i kodomenu da ona postane bijekcija:

(i) **ograničenje kodomene - postizanje surjektivnosti:** treba uzeti da je kodomena jednaka intervalu $[\frac{3}{4}, \infty >$ jer ćemo tada imati surjektivnost - ona zahtijeva da za svaki y_0 **postoji** x_0 takav da je $f(x_0) = y_0$, dakle **barem jedan** takav x_0 - a to će u slučaju ovakvog izbora kodomene sigurno biti ispunjeno

(ii) **ograničenje domene - postizanje injektivnosti:** možemo uzeti da je kodomena jednaka intervalu $< -\infty, \frac{1}{2}]$ **ili** $[\frac{1}{2}, \infty >$. Naime, injektivnost zahtijeva da za svaki y_0 iz kodomene postoji **najviše** jedan x_0 takav da je $f(x_0) = y_0$. S obzirom da parabola ima dva kraka, lijevi i desni, moramo se odlučiti za samo jedan od njih - točka tjemena (točnije, njena $x-$koordinata) govori kako moramo "podijeliti" domenu da ona definira injektivnu funkciju - ako se odlučimo za interval $< -\infty, \frac{1}{2}]$ odabrali smo lijevi krak parabole, a uz $[\frac{1}{2}, \infty >$ odlučili smo se za desni krak. Oba izbora su dobra, pa se ovdje možemo odlučiti za npr. desni krak, tj. definirati da je domena dana s $[\frac{1}{2}, \infty >$.

Dakle, možemo za $f(x) = x^2 - x + 1$ definirati $f : [\frac{1}{2}, \infty >\to [\frac{3}{4}, \infty >$ - tako definirana funkcija f bit će bijekcija.

Zadatak 6 Pokažite računski da funkcija iz prethodnog zadatka nije bijekcija.

Rješenje: Pokazujemo da $f(x) = x^2 - x + 1$ nije bijekcija:

(i) **f nije injekcija:** Treba pokazati da iz $f(x_1) = f(x_2)$ ne slijedi nužno da je $x_1 = x_2$:

$$x_1^2 - x_1 + 1 = x_2^2 - x_2 + 1$$
$$x_1^2 - x_2^2 - x_1 + x_2 = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - (x_1 - x_2) = 0$$
$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 1) = 0.$$

Vidimo da očito postoje dvije mogućnosti:

(1) $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

(2) $x_1 + x_2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 + 1$,

pa ne slijedi nužno da je $x_1 = x_2$. Dakle, f nije injekcija.

(ii) **f nije surjekcija:** Treba vidjeti da za sve $y_0 \in \mathbb{R}$ ne postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x_0) = y_0$:

$$x_0^2 - x_0 + 1 = y_0$$
$$x_0^2 - x_0 + 1 - y_0 = 0,$$

što možemo shvatiti kao jednadžbu po x_0. Ta će jednadžba imati **realna** rješenja (a takve x_0 tražimo) ako je diskriminanta D nenegativna:

$$D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot (1 - y_0) = 4y_0 - 3 \geq 0,$$

dakle ako je $y_0 \geq \frac{3}{4}$. Očito dakle samo za takve $y_0 \in \mathbb{R}$ postoje x_0 takvi da je $f(x_0) = y_0$ (njih dobivamo rješavanjem gornje kvadratne jednadžbe po x_0). Međutim, za $y < \frac{3}{4}$ takvi x_0 ne postoje, jer gornja kvadratna jednadžba uopće nema realnih rješenja. Dakle, ako za kodomenu uzmemo čitav skup realnih brojeva, f nije surjektivna.

Zadatak 7 Odredite intervale rasta i pada, točku tjemena, te točke presjeka s $x-$osi (realne nultočke) za sljedeće kvadratne funkcije:

a) $f(x) = -x^2 - x + 6$

b) $g(x) = x^2 + 3x - 3$

c) $h(x) = x^2 - 2x + 4$.

Rješenje: Točku tjemena funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ tražimo prema formuli

$$T = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}),$$

gdje je $D = -b^2 + 4ac$. Pri tom vrijedi:

i) ako je $D > 0$ funkcija ima dvije realne nultočke dane s

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

i graf funkcije u dvije točke siječe $x-$os

ii) ako je $D = 0$ funkcija ima dvostruku realnu nultočku danu s

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

i graf funkcije u jednoj točki siječe (točnije, dodiruje) $x-$os - ta točka je ujedno i točka tjemena grafa

iii) ako je $D < 0$ funkcija nema realnih nultočaka (obje nultočke su kompleksni brojevi) - graf funkcije ne siječe $x-$os. Ove kompleksne nultočke su dane istom formulom kao realne nultočke pod i) (samo je sada $D < 0$ pa su x_1 i x_2 kompleksni).

Intervale rasta i pada dobijemo tako da $x-$koordinata točke tjemena ($x_0 = -\frac{b}{2a}$) dijeli domenu (čitav skup realnih brojeva) na dva intervala: $< -\infty, x_0 >$ i $< x_0, \infty >$ - jedan od ta dva intervala je interval rasta, a drugi pada, ovisno o tome je li $a > 0$ ili $a < 0$:

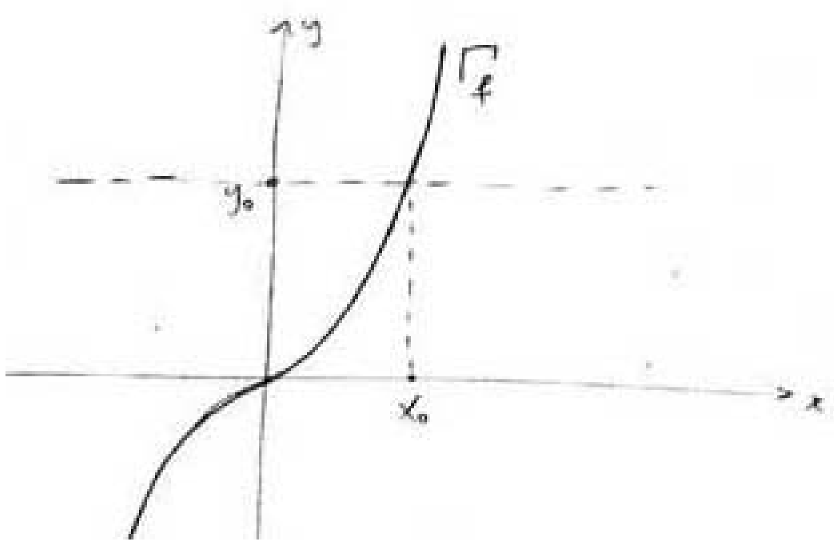
i) ako je $a > 0$ graf je "okrenut prema gore" (konveksan), tjeme predstavlja točku lokalnog minimuma i u skladu s tim $< -\infty, x_0 >$ je interval pada, a $< x_0, \infty >$ je interval rasta

ii) ako je $a < 0$ graf je "okrenut prema dolje" (konkavan), tjeme predstavlja točku lokalnog maksimuma i u skladu s tim $< -\infty, x_0 >$ je interval rasta, a $< x_0, \infty >$ je interval pada.

Pokušajte sami prema ovim pravilima riješiti zadatak.

Zadatak 8 Nacrtajte u istom koordinatnom sustavu grafove funkcija $f(x) = x^3$ i $g(x) = (x-1)^3 + 2$. Jesu li te funkcije bijekcije? Napišite f^{-1} i g^{-1} ako jesu.

Rješenje: Graf funkcije f je kubna parabola koja raste na cijeloj domeni, siječe x-os u $x = 0$, a $(0,0)$ je ujedno i točka infleksije:



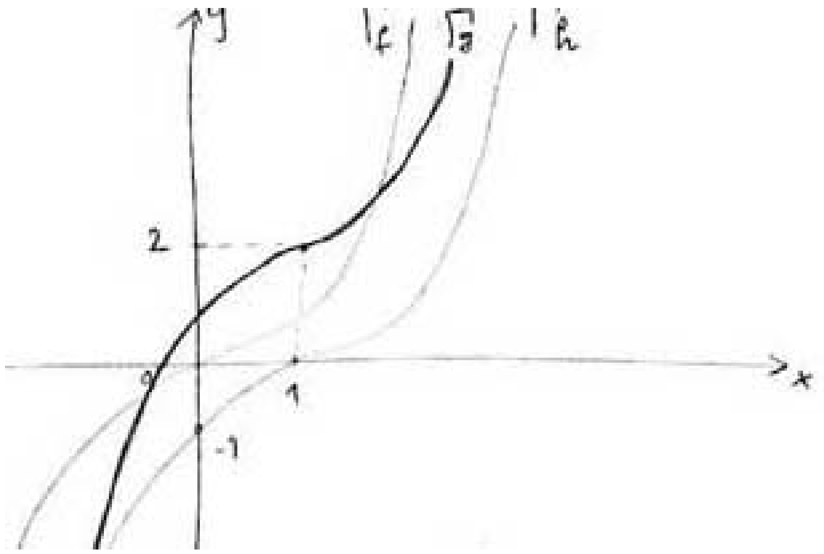
Iz grafa funkcije f vidimo da je ona bijekcija, jer za svaki $y_0 \in \mathbb{R}$ postoji **jedinstveni** $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x_0) = y_0$.

Da nađemo inverz funkcije f u izrazu $y = x^3$ radimo formalnu zamjenu varijabli x i y i računamo eksplicitno y:

$$x = y^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x},$$

pa je $f^{-1} = \sqrt[3]{x}$.

Graf funkcije $g(x) = (x-1)^3 + 2$ dobiva se iz grafa funkcije f translacijom: -1 označava da graf funkcije $f(x) = x^3$ translatiramo udesno duž $x-$osi za 1 - time dolazimo do grafa pomoćne funkcije $h(x) = (x-1)^3$, dok $+2$ označava da graf funkcije $h(x) = (x-1)^3$ translatiramo za 2 prema gore duž $y-$osi - time dolazimo do grafa funkcije g:



Jasno je da je i ova funkcija bijekcija, jer je njen graf jednak grafu funkcije f, uz određeni translatorni pomak. Računamo g^{-1}:

$$x = (y-1)^3 + 2 \Rightarrow (y-1)^3 = x - 2 \Rightarrow y - 1 = \sqrt[3]{(x-2)} \Rightarrow y = \sqrt[3]{(x-2)} + 1,$$

odakle izlazi da je $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{(x-2)} + 1$.

Zadatak 9 Napišite primjer jedne rastuće i jedne padajuće eksponencijalne funkcije.

Zadatak 10 Nacrtajte graf funkcije $f(x) = 3^x$, pokažite na svojstvima grafa da je bijekcija i nacrtajte na istoj slici inverznu funkciju te funkcije. Kako se zove ta inverzna funkcija?

Zadatak 11 Riješite jednadžbe:

a) $2^x = 8$

b) $\log_2 x = 3$

c) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2$.

Rješenje:

i) Rješavamo zadatak djelovanjem inverznom funkcijom funkcije $f(x) = 2^x$, tj. funkcijom logaritmiranja po bazi 2 i koristimo svojstvo $\log_a a^x = x$:

$$2^x = 8 / \log_2$$
$$x = \log_2 8 = \log_2 2^3$$
$$x = 3.$$

ii) Kao u prethodnom zadatku, djelujemo inverznom funkcijom funkcije $f(x) = \log_2 x$, tj. eksponencijalnom funkcijom s bazom 2 i koristimo svojstvo $\log_a a^x = x$:

$$\log_2 x = 3 / 2^{-}$$
$$x = 2^3$$
$$x = 8.$$

iii) Prepoznajemo da je $4^x = (2^x)^2$, pa uz supstituciju $2^x = t$ imamo

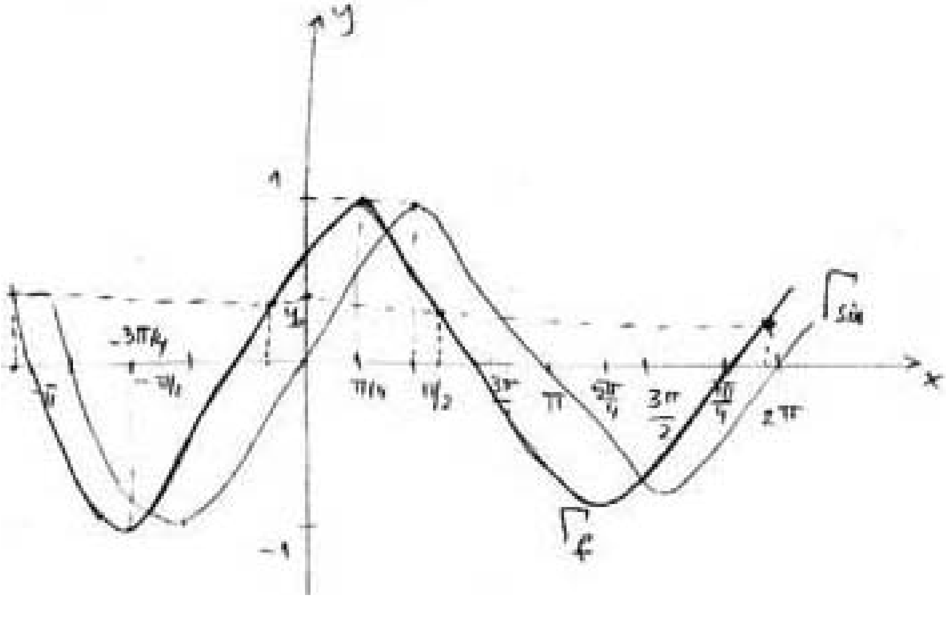
$$t^2 - 3t + 2,$$

čija su rješenja dana s $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. Stoga imamo dva rješenja:

$$2^x = 1 / \log_2 \Rightarrow x = \log_2 1 = 0$$
$$2^x = 2 / \log_2 \Rightarrow x = \log_2 2 = 1.$$

Zadatak 12 Pokažite da funkcija $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ dana s $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ nije injekcija.

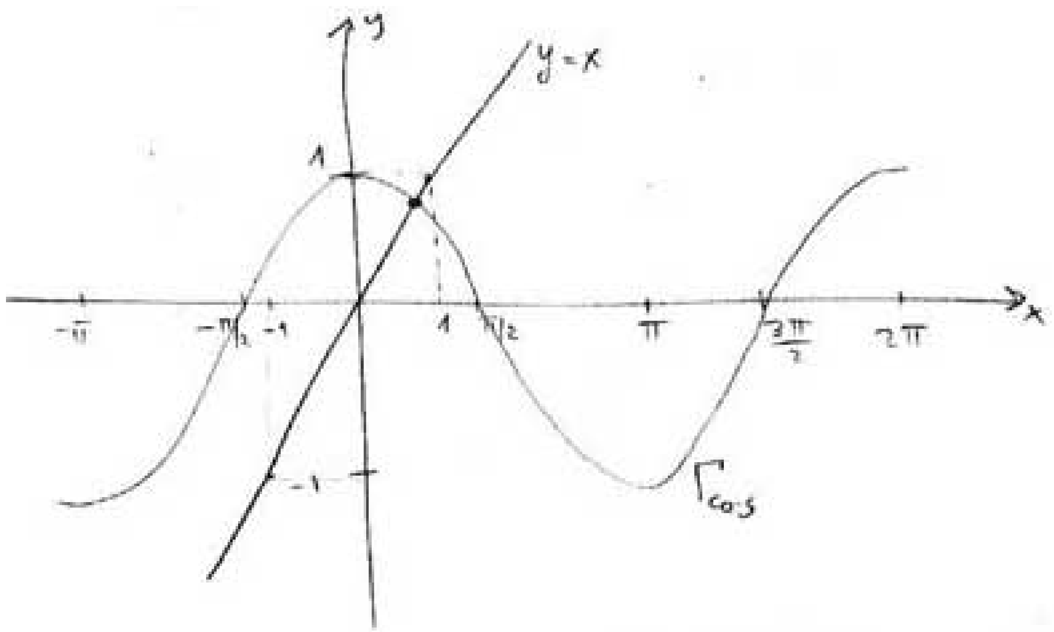
Rješenje: Graf funkcije f dobivamo pomakom grafa funkcije $g(x) = \sin x$ za $\frac{\pi}{4}$ ulijevo duž $x-$osi:



Očito je da ta funkcija nije injekcija, jer za svaki $y_0 \in [-1, 1]$ postoji beskonačno mnogo različitih x_0 takvih da je $f(x_0) = y_0$ - naime, pravac kroz y_0 okomit na $y-$os siječe graf funkcije f u beskonačno mnogo točaka.

Zadatak 13 Pokažite grafički da jednadžba $\cos x = x$ ima samo jedno realno rješenje.

Rješenje: Ovu ćemo jednadžbu riješiti tako da nacrtamo grafove dvije funkcije $f(x) = \cos x$ i $g(x) = x$ - jednadžba $f(x) = g(x)$ (tj. upravo $\cos x = x$) ima geometrijskog značenje presjeka krivulja $y = f(x)$ i $y = g(x)$ - broj točaka presjeka tih krivulja odgovara broju realnih rješenja zadane jednadžbe. Nacrtajmo na istoj slici grafove tih funkcija:



Vidimo da postoji samo jedna točka presjeka tih krivulja, pa i jednadžba ima samo jedno rješenje.

Poglavlje 1

Limesi i derivacije

1.0.1 Limesi

Limes funkcije $f(x)$ kada x teži nekoj točki a (ovdje a može označavati i $\pm\infty$) možemo intuitivno shvatiti kao vrijednost kojoj funkcija f teži kada x ide u a. Označavamo ga sa $\lim_{x\to a} f(x)$ i on može, ali i ne mora postojati.

Zadatak 1 *Odredite sljedeće limese:*

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{2}{x^4+6x+2}$

(c) $\lim_{x\to 2}(\sin x)$

Rješenje:

(a) Ako x ide u ∞, onda x^2+1 ide također u ∞ pa imamo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} \text{"}=\text{"} \frac{1}{\infty} = 0$$

(b) Funkcija $f(x) = \frac{2}{x^4+6x+2}$ je dobro definirana u nuli pa samo uvrstimo $x = 0$ i dobivamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{x^4+6x+2} = \frac{2}{0+0+2} = 1$$

(c) Analogno kao i gore:

$$\lim_{x\to 2}(\sin x) = \sin 2$$

Vrijedi sljedeće: ako postoje limesi $\lim_{x\to a} f_1(x)$ i $\lim_{x\to a} f_2(x)$, onda

1) $\lim_{x\to a}(f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x)$,

2) $\lim_{x\to a} f_1(x) f_2(x) = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x)$,

3) $\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f_1(x)}{\lim_{x\to a} f_2(x)}$ ako $\lim_{x\to a} f_2(x) \neq 0$.

Zadatak 2 *Nađite sljedeće limese koristeći gornja svojstva limesa:*

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x} \cdot (x^2+7x-3)$

(b) $\lim_{x\to 3}(e^x + 2\sqrt{3x})$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{2x+6}{x^3+x+1}$

Rješenje:

(a) Imamo:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{2} \cdot (x^2+7x-3) = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{2} \cdot \lim_{x\to 1}(x^2+7x-3) =$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{2} \cdot (\lim_{x\to 1}(x^2) + \lim_{x\to 1}(7x-3)) = \frac{0}{2} \cdot (1+4) = 0 \cdot 5 = 0$$

(c) Imamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+6}{x^3+x+1} = \frac{\lim_{x\to 0}(2x+6)}{\lim_{x\to 0}(x^3+x+1)} =$$
$$= \frac{0+6}{0+0+1} = \frac{6}{1} = 6$$

Ako tražimo limes kvocijenta dvaju polinoma u x kada $x\to\infty$, preporučljivo je oba člana kvocijenta prethodno podijeliti sa x^n gdje je n najveća potencija tih polinoma. analogno postupamo i u mnogim slučajevima razlomaka sa iracionalnim izrazima.
Ako su, nadalje, $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi i $P(a)\neq 0$ ili $Q(a)\neq 0$, limes

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

dobivamo direktno. U slučaju da $P(a) = Q(a) = 0$, razlomak $\frac{P(x)}{Q(x)}$ dijelimo sa $(x-a)$ onoliko puta dok ne dođemo u situaciju gdje možemo računati direktno.

Zadatak 3 *Izračunajte:*

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^5+6x^3+3x+1}{x^5+6}$

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{3x+\sqrt[3]{x}}$

(c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

(d) $\lim_{h\to 1} \frac{x^3+x^2+x-3}{x^3-3x^2+4x-2}$

(e) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x-4}{\sqrt{x^4+1}}$

(f) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

(g) $\lim_{x\to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$

(h) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$

Rješenje:

(a) Dijelimo s najvećom potencijom od x i brojnik i nazivnik, a to je očito x^5:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5+6x^3+3x+1}{x^5+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{6}{x^2}+\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^5}}{1+\frac{6}{x^5}}=\frac{2}{1}=2$$

jer faktori oblika $\frac{a}{x^n}$ gdje je a neka konstanta a n prirodan broj očito idu u nulu ako x ide u ∞.

(c) Oba polinoma (i onaj u brojniku i onaj u nazivniku) poprimaju konkretnu vrijednost za $x=2$. Kako vrijednost nazivnika nije nula, limes dobivamo direktno:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\frac{2^3-3\cdot 2+2}{2^4-4\cdot 2+3}=\frac{4}{11}$$

(e) Ovdje su za $x=1$ i brojnik i nazivnik nula. Dijelimo, dakle, oiba polinoma sa $x-1$ i dobivamo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+x-3}{x^3-3x^2+4x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+2x+3)}{(x-1)(x^2-2x+2)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x+3}{x^2-2x+2}=\frac{1+2+3}{1-2+2}=6$$

Limese koji sadrže iracionalne izraze možemo često dovesti u racionalni oblik uvođenjem nove varijable. Drugi način rješavanja takvih limesa je prebacivanje iracionalnosti iz brojnika u nazivnik ili obrnuto.

1. Izračunajte:
   (a) $\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}$
   (b) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$
   (c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-3x}-\sqrt{1+x}}{x}$
   (d) $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$
   (e) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{1})$
   (f) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x(x+a)}-x)$
   (g) $\lim_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$
   (h) $\lim_{x\to\infty}(x+\sqrt[3]{1-x^3})$

Rješenje:

(a) Koristimo jednakost $1-x=(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})$ za racionalizaciju:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{(1-\sqrt[3]{x})}\frac{(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{1-x}=$$
$$=\lim_{x\to 1}(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})=3$$

(f) Opet racionaliziramo:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x(x+a)}-x)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x(x+a)}-x)\frac{(\sqrt{x(x+a)}+x)}{(\sqrt{x(x+a)}+x)}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(x+a)-x^2}{\sqrt{x(x+a)}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{\sqrt{x(x+a)}+x}$$

Tu je najveća potencija u brojniku i nazivniku x pa dijelimo s tim:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax}{\sqrt{x(x+a)}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1} = \frac{a}{2}$$

Za računanje limesa korisne su sljedeće formule:

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,

(ii) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

Neka je $f(x)$ pozitivna funkcija u nekoj okolini točke a $(a \neq x)$. Pri određivanju limesa oblika

$$\lim_{x\to a} (f(x))^{g(x)} = C,$$

vrijedi sljedeće:

1) ako egzistiraju konačni limesi

$$\lim_{x\to a} f(x) = A > 0 \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = B$$

gdje je $0 \leq A \leq +\infty$ i $-\infty < B < +\infty$ tada je $C = A^B$.

2) ako je $\lim_{x\to a} f(x) = A \neq 1$ i $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ onda C pronalazimo neposredno,

3) ako je $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ i $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, onda stavljamo $f(x) = 1+\alpha(x)$ gdje $\alpha(x) \to 0$ kada $x \to a$ i prema tome

$$C = \lim_{x\to a} \left[(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right]^{\alpha(x)g(x)} = e^{\lim_{x\to a} \alpha(x)g(x)} = e^{\lim_{x\to a}(f(x)-1)g(x)}.$$

Koristeći gornja pravila lako dobivamo da je općenito

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k.$$

Zadatak 4 *Izračunajte:*

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

(c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\pi - 3x}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

(e) $\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x}$

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\arctan \frac{\pi}{2} x}$

(h) $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x}$

Rješenje:

(a) Koristimo $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x}{7x} \frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin 7x}{7x}} = \frac{5}{7} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin 7x}{7x}} = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{1} = \frac{5}{7}$$

(b) Imamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\frac{1}{\cos x}-1)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\frac{1-\cos x}{\cos x})}{x^3}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cos x}=8\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}}{\cos x}=8$$

jer $\cos 0=1$.

Zadatak 5 *Izračunajte:*

(a) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$

(b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$

(c) $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

(d) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$

(e) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

(f) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$

Rješenje:

(a) Ovo je slučaj (1) kod limesa oblika $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=C$:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to 1}=\left(\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

(e) Ovo je slučaj (3) jer imamo očito 1^∞.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3-4}{x+3}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(-\frac{4}{x+3}\right)\right)^{x+2}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[\left(1+\left(-\frac{4}{x+3}\right)\right)^{-\frac{x+3}{4}}\right]^{-\frac{4}{x+3}}\right\}^{x+2}=\lim_{x\to\infty}e^{-4\frac{x+2}{x+3}}=e^{-4}$$

Ako egzistira i pozitivan je $\lim_{x\to a}f(x)$, onda

$$\lim_{x\to a}(\ln f(x))=\ln(\lim_{x\to a}f(x)).$$

Pomoću toga odmah dobivamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}(\ln(1+x)^{\frac{1}{x}})=\ln(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}})=\ln e=1.$$

Zadatak 6 *Izračunajte:*

(a) $\lim_{x\to+\infty}(\ln(2x+1)-\ln(x+2))$

(b) $\lim_{x\to\infty}x(\ln(x+1)-\ln x)$

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$

(d) $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$

(e) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$

(f) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

(g) $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{\sin x}$

(h) $\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x-1}{x^2}$

Rješenje:

(a) Koristeći svojstva logaritamske funkcije dobivamo:

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln(2x+1)-\ln(x+2)) = \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right) = \ln\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x+2} = \ln 2$$

(e) Imamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \left\{a^x-1=t,\ x=\frac{\ln(t+1)}{\ln a}\right\} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{\ln a}} = \ln a$$

1.0.2 L'Hospitalovo pravilo

L'Hospitalovo pravilo: koristi se za neodređene oblike tipa $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$. Drugim riječima, ako imamo f i g funkcije takve da $\frac{f(x)}{g(x)}$ teži ka $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$ ako $x\to a$, onda je

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

pod uvjetom da limes kvocijenta derivacija postoji.

Ako razlomak $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ iznova daje neodređeni oblik u točki $x=a$ jednog od dva navedene tipa i $f'(x)$, $g'(x)$ udovoljavaju ranije navedenim zahtjevima za $f(x)$ i $g(x)$, onda se može prijeći na kvocijent drugih derivacija itd.

Da bi našli vrijednosti neodređenog oblika $0\cdot\infty$ pretvaramo odgovarajući produkt $f_1(x)\cdot f_2(x)$, gdje je $\lim_{x\to a} f_1(x)=0$ i $\lim_{x\to a} f_2(x)=\infty$, u razlomak oblika

$$\frac{f_1(x)}{\frac{1}{f_2(x)}}\quad\left(\text{oblik }\frac{0}{0}\right)\quad\text{ili}\quad\frac{f_2(x)}{\frac{1}{f_1(x)}}\quad\left(\text{oblik }\frac{\infty}{\infty}\right).$$

U slučaju neodređenog oblika $\infty-\infty$ treba odgovarajuću razliku $f_1(x)-f_2(x)$ pretvoriti u produkt $f_1(x)\left(1-\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right)$ i riješiti prvo neodređeni oblik $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$. Ako je kojim slučajem $\lim_{x\to a}\frac{f_2(x)}{f_1(x)}=1$, onda razliku $f_1(x)-f_2(x)$ pretvaramo u

$$\frac{1-\frac{f_2(x)}{f_1(x)}}{\frac{1}{f_1(x)}}\quad\left(\text{oblik }\frac{0}{0}\right).$$

Zadatak 7 *Koristeći L'Hospitalovo pravilo izračunajte:*

(a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$

(b) $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x+\sin x}$

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x-\sin x}$

(d) $\lim_{x\to 1}\ln x\ln(x-1)$

(e) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\cot x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$

(f) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

(g) $\lim_{x\to\infty}(x-\ln x)$

(h) $\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$

Rješenje:

(a) Ovo je očito situacija $\frac{\infty}{\infty}$ pa primjenjujemo L'Hospitalovo pravilo i dobivamo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2} = L'H = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x} = L'H = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2} = \infty$$

jer $(e^x)' = e^x$, $(x^2)' = 2x$ i konačno $(2x)' = 2$

(c) Ovo je slučaj $\frac{0}{0}$, primjenjujemo L'Hospitalovo pravilo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x} = L'H = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos^3}{\cos^2 x - \cos^3 x} =$$
$$= L'H = \lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x \sin x}{-2\cos x \sin x + 3\cos^2 x \sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x}{-2\cos x + 3\cos^2 x} = \frac{3}{-2+3} = 3$$

1.0.3 Deriviranje funkcija

Derivacijom $f'(x_0)$ funkcije f u točki x_0 nazivamo limes kvocijenta $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ kada h teži u nulu, odnosno

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

ako taj limes postoji. U tom slučaju kažemo da je funkcija f derivabilna u točki x_0.

Vrijednost derivacije $f'(x_0)$ daje *koeficijent smjera* tangente u točki x_0 na graf funkcije f. Određivanje derivacije nazivamo *deriviranjem funkcije*.

Zadatak 8 *Koristeći definiciju derivacije, izračunajte derivaciju sljedećih funkcija:*

a) $f(x) = x$,

b) $f(x) = x^3$,

c) $f(x) = \sqrt{x}$,

d) $f(x) = \sin x$.

Rješenje:

(b) Tražimo derivaciju u točki x_0. Imamo:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^3-(x_0)^3}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{x_0^3+3x_0^2h+3x_0h^2+h^3-x_0^3}{h} = \lim_{h\to 0}(3x_0^2h+3x_0h+h^2) = 3x_0^2$$

Znači, općenito možemo reći da je $(x^3)' = 3x^2$, odnosno derivacija funkcije x^3 je funkcija $3x^2$.

Osnovna pravila deriviranja: Neka je c konstanta a f i g funkcije koje imaju derivacije. Onda je

1) $(c)' = 0,$

2) $(x)' = 1,$

3) $(f \pm g)' = f' \pm g',$

4) $(cf)' = cf',$

5) $(fg)' = f'g + fg',$

6) $\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (g \neq 0).$

Zadatak 9 *Izračunajte derivacije sljedećih funkcija koristeći gornja pravila:*

(a) $f(x) = x^5 + x^{\frac{3}{2}} + 2x$

(b) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

(c) $f(x) = \frac{\pi}{x^2} + \ln 2$

(d) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

(e) $f(x) = 6\sin x + \cos x$

(f) $f(x) = x^2 \tan x$

(g) $f(x) = (x^3 + 5x)e^x$

(h) $f(x) = \ln x \arcsin x + \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

Rješenje:

(e) Imamo:

$$(6\sin x + \cos x)' = (6\sin x)' + (\cos x)' = 6(\sin x)' - \sin x = 6\cos x - \sin x$$

(g) Imamo:

$$((x^3 + 5x)e^x)' = (x^3 + 5x)'e^x + (x^3 + 5x)(e^x)' = ((x^3)' + (5x)')e^x + (x^3 + 5x)e^x =$$
$$= (3x^2 + 5)e^x + (x^3 + 5x)(e^x)$$

Pravilo deriviranja složenih funkcija: Ako je $h = f \circ g$ složena funkcija, a funkcije f i g imaju derivacije u $g(x)$, tj x, onda je

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ili kraće

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'.$$

Zadatak 10 *Izračunajte derivacije sljedećih funkcija:*

(a) $f(x) = \sqrt{\frac{5\sin x - \cos x}{x}}$

(b) $f(x) = \cos(xe^x + x^2)$

(c) $f(x) = x^3 10^{x^2+6x}$

(d) $f(x) = \ln(4\sin x - \arccos 2x)$

(e) $f(x) = \sqrt{\ln x + x} + \ln\sqrt{x} + x$

(f) $f(t) = t^2 \sin e^t$

(g) $f(x) = \left(\frac{ax^n + b}{cx^n - d}\right)^m$

(h) $f(x) = \arctan \frac{x^3 + x}{\sqrt{x^2+1}}.$

Rješenje:

(b) Imamo:

$$(\cos(xe^x+x^2))' = -\sin(xe^x+x^2)(xe^x+x^2)' = -\sin(xe^x+x^2)(e^x+xe^x+2x)$$

(h) Deriviramo:

$$\begin{aligned}
\left(\arctan\frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' &= \frac{1}{1+\left(\frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}\left(\frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \\
&= \frac{1}{1+\frac{(x^3+x)^2}{x^2+1}}\frac{(x^3+x)'\sqrt{x^2+1}-(x^3+x)(\sqrt{x^2+1})'}{x^2+1} = \\
&= \frac{1}{x^2+1+(x^3+x)^2}\left((3x^2+1)\sqrt{x^2+1}-(x^3+x)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})\right)
\end{aligned}$$

Zadatak 11 *Izračunajte $f'(x)$ ako je*

(a) $f(x) = |x|$, *(b)* $f(x) = x|x|$, *(c)* $f(x) = \ln|x|$.

Zadatak 12 *Izračunajte $f'(x)$ i $f'(0)$ ako je $f(x) = e^{-5x}\sin 3x$.*

Rješenje: Imamo

$$f'(x) = (e^{-5x}\sin 3x)' = -5e^{-5x}\sin 3x + 3e^{-5x}\cos 3x$$

i specijalno je vrijednost derivacije u točki $x = 0$ jednaka
$f'(0) = -5e^0\sin 0 + 3e^0\cos 0 = 3$.

Zadatak 13 *Pokažite da je $f'(x) = \frac{1}{\cos x}$ ako je $f(x) = \ln\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.*

Zadatak 14 *Pokažite da je $((\sin x)^n\cos(nx))' = n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x$.*

Zadatak 15 *Pokažite da funkcija $y = xe^{-x}$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu $xy' = (1-x)y$.*

Rješenje: Tražimo derivaciju zadane funkcije, $y' = (xe^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x}$. Sada lijeva strana jednakost $xy' = (1-x)y$ izgleda:

$$xy' = x(e^{-x} - xe^{-x}) = xe^{-x}(1-x)$$

dok desna daje

$$(1-x)y = (1-x)xe^{-x}$$

To je očito isto stoga zaključujemo da vrijedi $xy' = (1-x)y$, odnosno y zadovoljava danu diferencijalnu jednadžbu.

Vježbe iz Matematike 1.

13. Linearna aproksimacija funkcije, kvadratna aproksimacija. Taylorov red.

Zadatak 1 Koristeći linearnu aproksimaciju izračunajte približno:

1) $\sqrt{3.99}$

2) $\sqrt[3]{8.02}$

3) $\sqrt{64.03} + \sqrt[3]{64.03}$

4) $\log_4 16.02$.

Rješenje: U rješenju koristimo formulu

$$f(x_0 + \triangle x) \approx f(x_0) + \triangle x \cdot f'(x_0).$$

1) Ovdje je $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$, $\triangle x = -0.01$. Stoga je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, pa je $f(x_0) = \sqrt{4} = 2$, $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$, pa imamo

$$\sqrt{3.99} \approx 2 - 0.01 \cdot \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{400}.$$

2) Analogno kao u prethodnom zadatku, uz $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$, $\triangle x = 0.02$.

3) Definiramo $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$. Računamo $f(64.03)$. Premo gornjoj formuli je

$$f(64.03) \approx f(64) + 0.03 \cdot f'(64.03).$$

Očito je $f(64) = \sqrt{64} + \sqrt[3]{64} = 8 + 4 = 12$. Dalje,

$$f'(x) = (x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

pa je

$$f'(64) = \frac{1}{2 \cdot 8} + \frac{1}{3 \cdot 16} = \frac{1}{16} + \frac{1}{48} = \frac{1}{12}.$$

Konačno imamo

$$f(64.03) \approx 12 + 0.03 \cdot \frac{1}{12} = 12 + \frac{3}{100} \cdot \frac{1}{12} = 12 + \frac{1}{400}.$$

4) Ovdje je $f(x) = \log_4 x$, $x_0 = 16$, $\triangle x = 0.02$, pa je $f'(x) = \frac{1}{\ln 4} \cdot \log_4 x$ te konačno

$$\log_4 16.02 \approx \log_4 16 + 0.02 \cdot \frac{1}{\ln 4} \cdot \log_4 16 = 2 + \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{\ln 4} \cdot 2 = 2 + \frac{1}{25 \ln 4}.$$

Zadatak 2 Napišite jednadžbu tangente na graf funkcije f u zadanoj točki $(x_0, f(x_0))$, ako je:

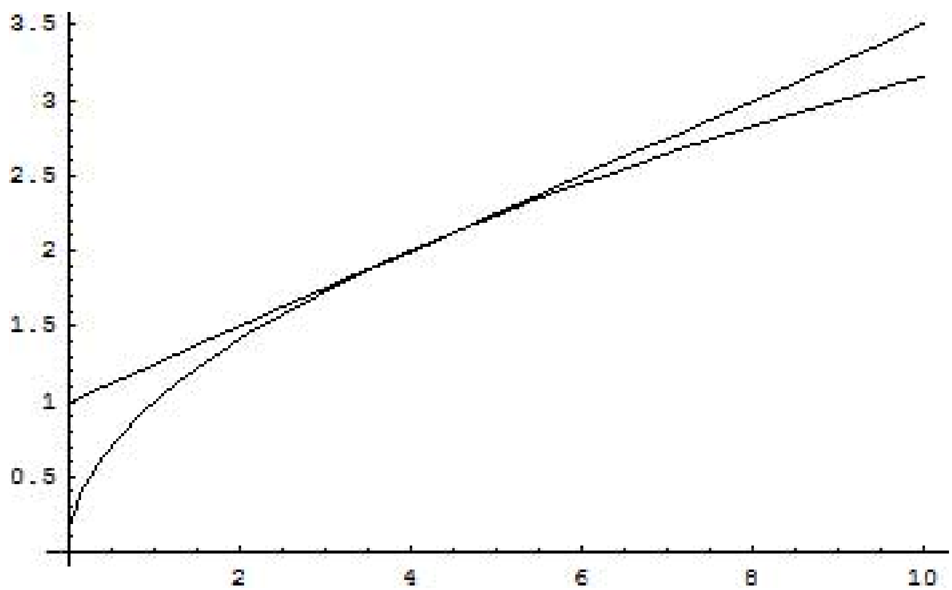
1) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$
2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$
3) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 64$
4) $f(x) = \log_4 x$, $x = 16$.

Skicirajte u istom koordinatnom sustavu graf funkcije i graf tangente za 1).
Rješenje: Formula za tangentu na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$ glasi

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

S obzirom da za zadanu točku x_0 treba još samo izračunati $f(x_0)$ i $f'(x_0)$, a te smo račune obavili već u prethodnom zadatku, pa rješavanje ide lako:

1) $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + 1$



2) $y - 2 = \frac{1}{12}(x - 8) \Rightarrow y = \frac{1}{12}x + \frac{4}{3}$
3) $y - 12 = \frac{1}{12}(x - 64) \Rightarrow y = \frac{1}{12}x + \frac{20}{3}$
4) $y - 2 = \frac{2}{\ln 4}(x - 16) \Rightarrow y = \frac{2}{\ln 4}x + 2 - \frac{32}{\ln 4}$

Zadatak 3 Interpretirajte rješenja zadatka 1 u terminima jednadžbi za tangente dobivenima u zadatku 2!

Rješenje: Vrijednosti dobivene za linearnu aproksimaciju u zadanim točkama točno su jednake vrijednostima na tangenti koje odgovaraju tim točkama. Na primjer, u prvom zadatku, podzatak 1), tražili smo približnu vrijednost broja $\sqrt{3.99}$, dobivena vrijednost bila je $4 - \frac{1}{400}$. No, ako u jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ u točki $x_0 = 4$ uvrstimo $x = 3.99$, dobivamo

$$y = \frac{1}{4} \cdot 3.99 + 1 = \frac{1}{4}(4 - 0.01) + 1 = 2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{100} = 2 - \frac{1}{400},$$

i to je upravo vrijednost dobivena u prvom zadatku.

Zaključujemo da približnu vrijednost funkcije u nekoj točki koja je "blizu" točke u kojoj znamo tangentu na graf funkcije možemo dobiti kao $y-$vrijednost tangente u toj točki.

Provjerite za ostale podzadatke prvog zadatka da dobivate na ovaj način iste vrijednosti koje ste dobili i tamo!

Formulu za linearnu aproksimaciju stoga možemo shvatiti kao formulu

$$f(x) \approx g_1(x),$$

gdje je

$$g_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Ovdje formulom izričemo istu onu tvrdnju koju smo riječima iskazali na kraju prethodnog zadatka; pritom g_1 oznčava funkciju čiji je graf točno tangenta na graf funkcije f u točki x_0. Naravno, shvaćamo da gornja približna jednakost vrijedi za točke x koje se nalaze "dovoljno blizu" točki x_0 u kojoj smo računali tangentu na graf funkcije f.

Nije teško vidjeti da će kvadratna aproksimacija vrijednosti funkcije f u točki x blizu točke x_0 biti dana sljedećom formulom:

$$f(x) \approx g_2(x_0),$$

gdje je

$$g_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Može se pokazati da "dovoljno dobre" funkcije u nekoj okolini točke x_0 možemo aproksimirati polinomom proizvoljnog stupnja n (dakle, da ćemo moći izračunati približnu vrijednost funkcije f u svakoj točki x koja je u nekoj okolini točke x_0):

$$f(x) \approx g_n(x),$$

$$\begin{aligned} g_n(x) = \; & f(x_0) + \\ & f'(x_0)(x - x_0) + \\ & \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \\ & \frac{1}{6} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \\ & \ldots + \\ & \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Pritom smo definirali da je

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n.$$

Sada vidimo da, ako definiramo da je $0! = 1$ i $f^{(0)} = f$, imamo da je

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Zadatak 4 Korištenjem kvadratne aproksimacije riješite 1) i 2) u prvom zadatku. Usporedite dobivena rješenja s onima iz prvog zadatka i nacrtajte u istom koordinatnom sustavu funkciju, tangentu i kvadratnu aproksimaciju za prvi podzadatak.

Rješenje:

Koristimo formulu $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$. Pritom smo za konkretne zadatke već izračunali $f(x_0)$ i $f'(x_0)$, pa preostaje još samo izračunati $f''(x_0)$.

1) Imamo da je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, pa je

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}.$$

Stoga je

$$f''(4) = -\frac{1}{4 \cdot \sqrt{64}} = -\frac{1}{32}$$

i imamo

$$\sqrt{3.99} \approx 2 - \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{100})^2 \cdot (-\frac{1}{32}) = 2 - \frac{1}{400} - \frac{1}{640000}.$$

Vidimo da je ovaj rezultat zapravo sličan rezulatatu u prvom zadatku. To je posljedica činjenice da g_2 ima isti "početak" kao i g_1 (provjerite!), pa će i rezultat kvadratne aproksimacije u nekoj točki izgledati kao rezultat linearne aproksimacije u toj točki, uz dodatak vrijednosti kvadratnog člana $\frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$. Kako je $x - x_0$ jako mala vrijednost (u pravilu po apsolutnoj vrijednosti manja od 1, ovdje -0.01), to će njen kvadrat biti još manji od nje same, što direktno povlači da će doprinos kvadratnog člana biti još manji nego onaj linearnog. Možemo to shvatiti kao činjenicu da kvadratna aproksimacija još "malo popravlja" linearnu aproksimaciju, ovdje za $-\frac{1}{640000} = -0.0000015625$.

Kako glasi funkcija kvadratne aproksimacije? Imamo

$$g_2(x) = 2 + \frac{1}{4}(x - 4) + \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{32})(x - 4)^2 = \ldots = -\frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

2) Znamo da je $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ ($\Rightarrow f''(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{12}$), pa je

$$f''(x) = \frac{1}{3} \cdot (-\frac{2}{3})x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

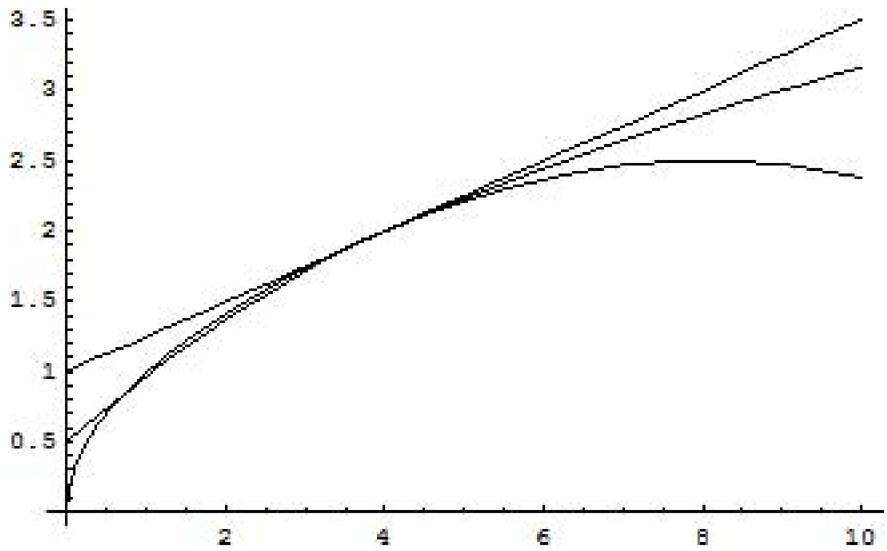
i stoga je

$$f''(8) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{8^5}} = -\frac{2}{9 \cdot 32} = -\frac{1}{144}.$$

Sada imamo

$$\sqrt[3]{8.02} \approx 2 + 0.02 \cdot \frac{1}{12} - 0.02^2 \cdot \frac{1}{144} = \ldots = 2 + \frac{1}{600} - \frac{1}{360000}.$$

Za kraj evo sliku koja za prvi podzatak u istom koordinatnom sustavu prikazuje funkciju $f(x) = \sqrt{x}$, te linearnu i kvadratnu aproksimaciju:



Ako sada "dozvolimo" da $g_n(x)$ ima beskonačno mnogo članova, dolazimo do $g_\infty(x)$, kojeg obično označavamo s $T(x)$ i zovemo Taylorov red funkcije f u točki x_0:

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Pritom vrijedi

$$f(x) = T(x),$$

tj. vrijednost funkcije i vrijednost Taylorovog reda se podudaraju za sve x iz neke okoline (tzv. područja konvergencije reda) točke x_0. To je i logično, jer aproksimacijama polinomima sve većeg i većeg stupnja dobivamo vrijednost sve bližu i bližu stvarnoj vrijednosti funkcije f, pa u limesu, tj. beskonačnosti i postižemo tu stvarnu vrijednost.

Sada ćemo računati Taylorov red za neke elementarne funkcije u zadanoj točki - kažemo da smo zadanu funkciju f "razvili" u Taylorov red u toj točki. Najčešće se funkcija razvija u Taylorov red u okolini nule (kada je to moguće).

Zadatak 5 Izračunajte Taylorov red sljedećih funkcija u zadanoj točki:

1) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

2) $f(x) = a^x$, $x_0 = 0$

3) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$ (zašto f ne razvijamo u Taylorov red u okolini nule?)

4) $f(x) = \log_a x$, $x_0 = 1$

5) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$

6) $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$

7) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$

8) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$

9) $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x_0 = 0$

10) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, $x_0 = 0$

11) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x_0 = 0$

12) $f(x) = 2\cos^2 x$, $x_0 = 0$.

Rješenje:

Ako je $x_0 = 0$, onda formula za $T(x)$ poprima nešto jednostavniji izgled:

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Vidimo da jedini član kojeg treba računati jest izraz za opću (k-tu) derivaciju funkcije f, a potom je evaluirati u zadanoj točki x_0.

1) Znamo da je prva derivacija funkcije $f(x) = e^x$ opet ona sama, pa je takva i druga, treća i sve ostale derivacije. Stoga je općenito $f^{(k)}(x) = e^x$, pa je $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$, pa je

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots + \frac{1}{k!}x^k + \ldots$$

2) Računamo prvih nekoliko derivacija funkcije $f(x) = a^x$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln a \cdot a^x \\ f''(x) &= \ln a \cdot \ln a \cdot a^x = \ln^2 a \cdot a^x \\ f'''(x) &= \ln^3 a \cdot a^x, \end{aligned}$$

pa zaključujemo da je

$$f^{(k)}(x) = \ln^k a \cdot a^x.$$

Stoga je

$$f^{(k)}(0) = \ln^k a \cdot a^0 = \ln^k a,$$

što uvrštavanjem u izraz za Taylorov red funkcije u nuli daje

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln^k a}{k!} x^k = 1 + \ln a \cdot x + \frac{\ln^2 a}{2} x^2 + \cdots + \frac{\ln^k a}{k!} x^k + \ldots$$

Vidimo da je Taylorov red za funkciju $f(x) = e^x$ poseban slučaj Taylorovog reda za funkciju $f(x) = a^x$ koji se dobiva uvrštavanjem $a = e$.

3) Najprije odgovorimo na pitanje zašto ne razvijamo $f(x) = \ln x$ u nuli - razlog je taj što logaritamska funkcija u nuli nije niti definirana, pa nema smisla raditi razvoj te funkcije u red u toj točki.

Sada računamo, kao i gore, nekoliko prvih derivacija zadane funkcije:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} \\ f''(x) &= -1 \cdot x^{-2} \\ f'''(x) &= (-1) \cdot (-2) \cdot x^{-3}, \end{aligned}$$

pa je općenito

$$f^{(k)}(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot \ldots \cdot (-(k-1)) \cdot x^{-k},$$

gdje produkt $(-1) \cdot (-2) \cdot \ldots \cdot (-(k-1))$ možemo shvatiti kao produkt $k-1$ puta -1 s $(k-1)!$. Stoga je

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot x^k,$$

pa je

$$f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot 1^k = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)!$$

Primijetimo da ova formula vrijedi za sve k veće od nule, dok za $k = 0$ imamo $f^{(0)}(x) = f(x) = \ln x$, što daje $f(1) = \ln 1 = 0$. No, to znači da prvi član Taylorovog reda iščezava. Stoga ćemo red pisati kao sumu kod koje indeks sumacije počinje s 1, a ne s 0, kao što je uobičajeno. Uvrštavanjem u izraz za Taylorov red funkcije f u $x_0 = 1$ izraz za opću derivaciju zadane funkcije u točki $x_0 = 1$ imamo

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{k!}(x-1)^k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{(k-1)! \cdot k}(x-1)^k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k = \\ &= x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{k!}(x-1)^k + \ldots \end{aligned}$$

4) Dobije se sličan red kao pod 3), samo uz dodatni faktor - slično kao što se 2) odnosi prema 1)

5) Računamo prvih nekoliko derivacija:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\sin x \\ f'''(x) &= -\cos x \\ f^4(x) &= \sin x = f(x) \end{aligned}$$

Vidimo dakle da je četvrta derivacija jednaka početnoj funkciji, peta derivacija je jednaka prvoj derivaciji, šesta drugoj, sedma trećoj itd. Općenito, možemo dati ovakvo pravilo:

$$\begin{aligned} f^{(4k)}(x) &= \sin x \\ f^{(4k+1)}(x) &= \cos x \\ f^{(4k+2)}(x) &= -\sin x \\ f^{(4k+3)}(x) &= -\cos x, \end{aligned}$$

gdje je $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zato je

$$\begin{aligned} f^{(4k)}(0) &= \sin 0 = 0 \\ f^{(4k+1)}(0) &= \cos 0 = 1 \\ f^{(4k+2)}(0) &= -\sin 0 = 0 \\ f^{(4k+3)}(0) &= -\cos 0 = -1, \end{aligned}$$

pa vidimo da je za sve parne derivacije vrijednost u nuli jednaka nula, dok za neparne derivacije vrijednost u nuli alterira između 1 i -1. Nije odmah jasno kako treba izgledati Taylorov red, pa ćemo napisati samo prvih nekoliko članova tog reda:

$$T(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots.$$

To znači da se u redu pojavljuju samo neparne potencije od x. Kako sumaciju radimo obično po svim potencijama od x, a ne samo neparnima, uvest ćemo takvu ovisnost potencije od x o indeksu sumacije koja će generirati samo neparne potencije. Očito možemo pisati

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

jer ovaj red generira točno onaj kojeg smo prvih nekoliko članova ispisali (provjerite sami!). Stoga je ovaj red traženi Taylorov red funkcije $f(x) = \sin x$ u nuli.

6) Zadatak se rješava analogno 5), s tim da se sada u Taylorovom redu pojavljuju samo parne potencije od x (provjerite!).

7) Zadatak je sličan zadatku 3), jer je $\frac{1}{x} = (\ln x)'$, pa će općenito $k-$ta derivacija funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ biti jednaka $(k+1)$-oj derivaciji logaritamske funkcije s bazom e (uvjerite se u ovaj argument direktnim računom!):

$$f^{(k)}(x) = (\ln x)^{(k+1)}(x) = (-1)^k \cdot k! \cdot x^{k+1},$$

pa je

$$f^{(k)}(1) = (-1)^k \cdot k! \cdot 1^{k+1} = (-1)^k \cdot k!$$

Stoga je

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot k!}{k!}(x-1)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot (x-1)^k = \\ &= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \ldots + (-1)^k \cdot (x-1)^k + \ldots \end{aligned}$$

8) Kao i prije, računamo prvih nekoliko derivacija zadane funkcije i potom zaključujemo kako glasi izraz za opću derivaciju:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \\
f'(x) &= (-1)\cdot(1-x)^{-2}\cdot(-1) = (-1)^2\cdot(1-x)^{-2} = (1-x)^{-2} \\
f''(x) &= (-2)\cdot(1-x)^{-3}\cdot(-1) = (-1)^2\cdot 2!\cdot(1-x)^{-3} = 2!\cdot(1-x)^{-3} \\
f'''(x) &= 2!\cdot(-3)\cdot(1-x)^{-4}\cdot(-1) = (-1)^2\cdot 3!\cdot(1-x)^{-4} = 3!\cdot(1-x)^{-4},
\end{aligned}$$

pa vidimo da je općenito

$$f^k(x) = k!\cdot(1-x)^{-(k+1)}$$

i stoga

$$f^k(0) = k!\cdot 1^{-(k+1)} = k!$$

Uvrštavanjem u opću formulu za Taylorov red dobivamo

$$\begin{aligned}
T(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{k!}x^k = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \\
&= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^k + \ldots
\end{aligned}$$

Napomenimo da ovu formulu načelno možemo izvesti iz formule za geometrijski red: označimo

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Pomnožimo ovu jednakost s x oduzmimo tako dobivenu jednakost od gornje. Dobivamo:

$$\begin{aligned}
S &= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \\
xS &= \phantom{1 + {}} x + x^2 + x^3 + \ldots \\
\Rightarrow & \\
S - xS &= 1 \\
(1-x)S &= 1 \\
S &= \frac{1}{1-x},
\end{aligned}$$

pa imamo

$$(*) \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots,$$

što je jednako

$$f(x) = T(x).$$

Poznavajući činjenicu da geometrijski red konvergira za $-1 < x < 1$ (što znači da jednakost (*) vrijedi samo za brojeve iz tog intervala), imamo i odgovor na pitanje koje je područje konvergencije dobivenog Taylorovog reda: $< -1, 1 >$.

9) Možemo se poslužiti trikom:

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)},$$

pa je Taylorov red ove funkcije u biti jednak Taylorovom redu funkcije iz prethodnog podzdatka, s tim da je sada argument tog reda $-x$:

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1\cdot x)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot x^k = \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^k \cdot x^k + \ldots \end{aligned}$$

Stoga je i područje konvergencije isto, jer red konvergira (i u tom području je $f(x) = T(x)$) za $-1 < -x < 1$, što je ekvivalentno $-1 < x < 1$, tj. intervalu $< -1, 1 >$.

Ovaj smo rezultat mogli dobiti i direktno, računajući prvih nekoliko derivacija funkcije f, pronalazeći formulu za opću derivaciju funkcije f, uvrštavajući u tu formulu $x_0 = 0$ i potom taj izraz uvrštavajući u opću formulu za Taylorov red. Provjerite!

10) Slično kao u 9), možemo se referirati na 8), pa će biti

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(x^2)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}x^{2k} = \\ &= x^2 + x^4 + \ldots + x^{2k} + \ldots \end{aligned}$$

Koje je ovdje područje konvergencije? Koristite nejednakost za konvergenciju reda 8), tj. nejednakost $-1 < x < 1$, koju sada zapišite kao $|x| < 1$. Uvrštavanjem x^2 umjesto x u tu nejednakost dobivamo novu nejednakost čije rješenje predstavlja interval područja konvergencije.

Ako računamo Taylorov red na uobičajeni način doći ćemo do problema već pri računanju prvih nekoliko derivacija (provjerite!). Zato ćemo morati pribjeći rastavu na parcijalne razlomke, tj. napisat ćemo

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}).$$

Sada će Taylorov red zadane funkcije $T(x)$ biti linearna kombinacija Taylorovih redova $T_1(x)$ i $T_2(x)$ funkcija $g_1 = \frac{1}{1-x}$ i $g_2(x) = \frac{1}{1+x}$:

$$T(x) = \frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{\infty}x^k + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot x^k) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(x^k + (-1)^k \cdot x^k) = \\
&= \frac{1}{2}(1 + 1 + x - x + x^2 - x^2 + x^3 - x^3 + \ldots) = \\
&= \frac{1}{2}(2 + 2x^2 + 2x^4 + \ldots) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x^k,
\end{aligned}
$$

pa vidimo da dobivamo isti rezultat kao gore.

11) Slično kao prethodni podzadatak - Taylorov red će biti jednak Taylorovom redu prethodnog podzadatka u kojeg smo umjesto x^2 uvrstili $-x^2$ (zašto?).

12) Koristimo formulu
$$2\cos^2 x = 1 + \cos(2x).$$
Kako je Taylorov red $T_{\cos}(x)$ kosinusa dan s (provjerite, tj. riješite 6))
$$T_{\cos}(x) = \sum_{k=0}^{k} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k},$$
to Taylorov red funkcije $g(x) = \cos(2x)$ dobivamo tako da u $T_{\cos}(x)$ uvrstimo argument $2x$, pa je on jednak
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(2x)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$
Konačno za Taylorov red $T(x)$ zadane funkcije imamo
$$T(x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

Poglavlje 1

Rast, pad, konkavnost, konveksnost, točke infleksije i ekstremi funkcija

1.0.1 Rast, pad i ekstremi funkcija

Pad i rast funkcije: Neka je zadana funkcije f, zanima nas gdje je područje pada, odnosno rasta. Kao što smo vidjeli na predavanjima, to možemo odrediti koristeći prvu derivaciju. Prva derivacija u nekoj točki je ujedino i koeficijent smjera tangente na graf krivulje u toj točki pa jasno da funkcija raste u okolini x_0 ako je $f'(x_0) > 0$ odnosno pada ako je $f'(x_0) < 0$.

Primjer 1 Nađite područje pada i rasta funkcije $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$.

Rješenje: Tražimo prvo derivaciju zadane funkcije: $f'(x) = x^2 - 4$. Rješavamo nejednadžbu

$$f'(x) > 0 \ \Rightarrow x^2 - 4 > 0 \ \Rightarrow x^2 > 4$$

pa funkcija raste na intervalima $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. Funkcija pada tamo gdje je $f'(x) < 0$, odnosno gdje vrijedi $x^2 < 4$ pa je jasno da pada na intervalu $(-2, 2)$.

Zadatak 2 Nađite područje pada i rasta funkcije $f(x) = e^{x^2} - x^2$.

Zadatak 3 Nađite područje pada i rasta funkcije $f(x) = \sin(2x)$ na intervalu $(-2\pi, 2\pi)$.

Zadatak 4 Nađite područje pada i rasta funkcije $f(x) = \frac{1}{x-3} + 4$.

Ekstremi funkcije: Neka je zadana funkcija f. Ako postoji okolina točke x_0 takva da za svaku točku $x \neq x_0$ te okoline vrijedi nejednakost $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$), onda točku x_0 nazivamo lokalnim minimumom (maksimumom) funkcije f. Točku lokalnog minimuma ili maksimuma funckije nazivamo točkom lokalnog ekstrema. Ako je x_0 točka lokalnog ekstrema funkcije f, onda je nužno ili $f'(x_0) = 0$ (stacionarna točka) ili $f'(x_0)$ ne postoji. Obrat ne vrijedi, točke u kojima $f'(x_0) = 0$ ili $f'(x_0)$ ne postoji (kritične točke) nisu uvijek točke ekstrema (vidi npr točke infleksije). Zato, ukolio nađemo točku kandidata za ekstrem (tj onu u kojoj je prva derivacija jednaka nuli ili ne postoji) treba ili provjeriti da prve derivacija u toj točki kandidatu mijenja predznak ili ispitati drugu derivaciju u točki kandidatu jer vrijedi sljedece:

a) ako je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$ u točki x_0 je lokalni minimum

b) ako je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$ u točki x_0 je lokalni maksimum

c) ako je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) = 0$ u točki x_0 ne znamo što je nego su potrebna daljnja ispitivanje

Primjer 5 Nađite lokalne ekstreme te područja pada i rasta funkcije $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$.

Rješenje: Prvo ispitujemo koje točke zadovoljavaju nužan uvjet, tj. za koje točke je $f'(x_0) = 0$:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0.$$

Rješimo gornju kvadratnu jednadžbu i dobivamo kandidate za ekstreme: $x_1 = 1$ i $x_2 = -2$. Provjeravamo vrijednost druge derivacije od f u tim točkama.

$$f''(x) = 12x + 6 \quad \text{pa} \quad f''(x_1) = 18, \; f''(x_2) = -18.$$

Zaključujemo da f ima lokalni minimum u $x_1 = 1$ i lokalni maksimum u $x_2 = -2$. Ispitujemo područja pada i rasta:

$$f'(x) > 0 \;\Rightarrow 6x^2 + 6x - 12 > 0 \;\Rightarrow x^2 + x - 2 > 0.$$

Znamo da su nultočke $x_1 = 1$ i $x_2 = -2$ a pošto gornja nejednakost ima pozitivan koeficijent uz x_2, $f'(x) > 0$ na intervalima $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ to jest na tim intervalima funkcija raste. Sada je jasno da funkcija pada na intervalu $(-2, 1)$. Iz činjenice da f' mijenja predznak u točkama $x_1 = 1$ i $x_2 = -2$, tj. da u njima iz pada prelazi u rast i obratno mogli smo također zaključiti da su to točke ekstrema bez ispitivanja druge derivacije u tim točkama.

1. Istražite ekstreme slijedećih funkcija:
   (a) $f(x) = x^2(x - 12)^2$
   (b) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2+8}}$
   (c) $f(x) = 2\sin 2x + \sin 4x$
   (d) $f(x) = x - \ln(1 + x)$
   (e) $f(x) = x^2 e^{-x}$
   (f) $f(x) = x - \arctan x$.

Zadatak 6 U skupu nenegativnih realnih brojeva odredite onaj koji zbrojen sa svojom recipročnom vrijednošću daje minimalan zbroj. Odredite taj zbroj!

Rješenje: Formiramo funkciju čiji minimum želimo naći: $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Tražimo kandidate za ekstreme

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \;\Rightarrow x^2 = 1$$

pa su kandidati $x_1 = 1$ i $x_2 = -1$. Ispitujemo drugu derivaciju u tim točkama:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \;\Rightarrow f''(1) = \frac{2}{3} > 0, \quad f''(-1) = -\frac{2}{3} < 0$$

Očito je traženi nenegativni minimum u $x_1 = 1$ i iznosi $f(1) = 2$.

1.0.2 Konkavnost, konveksnost i točke infleksije funkcija

Konkavnost i konveksnost: Za funkciju kažemo da je konveksna u okolini x_0 ako se tangenta na graf funkcije u x_0 nalazi ispod grafa funkcije. Ukoliko je iznad, govorimo o konkavnosti. Kriterij za ispitivanje je druga derivacija u točki x_0: ako je ona veća od nule, funkcija je tu konveksna a ako je manja od nule, funkcija je konkavna.

Primjer 1 Odredite područje konveksnosti i konkavnosti funkcije $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$.

Rješenje: Kao što smo za pad i rast ispitivali prvu derivaciju, tako ovdje ispitujemo drugu.

$$f'(x) = x^2 - 4 \ \Rightarrow f''(x) = 2x$$

Očito je $f''(x) > 0$ za $x > 0$ i $f''(x) < 0$ za $x < 0$ pa je područje konkavnosti $(-\infty, 0)$ a konveksnosti $(0, +\infty)$.

1. Istražite područje konveksnosti i konkavnosti slijedećih funkcija:
   (a) $f(x) = e^x - 2x$
   (b) $f(x) = 2\sin 2x - 4x$
   (c) $f(x) = \frac{1}{x} - x^2$

Točke infleksije: Točke u kojima funkcija prelazi iz konkavne u konveksnu ili obratno nazivaju se točke infleksije. Druga derivacija u tim točkama je ili jednaka nuli ili nije definirana. Međutim, slično kao kod traženja ekstrema, nije dovoljno provjeriti samo drugu derivaciju jer nam ona daje tek kandidate. Moramo se još uvjeriti da funkcija u tim točkama stvarno prelazi iz konveksne u konkavnu (ili obratno) tako što ćemo ispitati drugu derivaciju lijevo i desno od kandidata pa vidjeti da ona ima suprotan predznak. Ako je kojim slučajem i prva derivacija u tom kandidatu jednaka nuli, onda umjesto ispitivanja predznaka druge derivacije lijevo i desno od točke, možemo jednostavno izračunati treću derivaciju u toj točki i ako je ona različita od nule, to je točka infleksije.

Primjer 2 Ispitajte konkavnost i konveksnost te nađite točke infleksije funkcije $f(x) = e^{-x^2}$.

Rješenje: Tražimo drugu derivaciju:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \ \Rightarrow f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$$

pa je $f''(x) > 0$ ako je $2x^2 - 1 > 0$ jer $e^{-x^2} \geq 0$ za svako x (analogno za $f'(x) < 0$). Stoga je $f''(x) > 0$ na intervalu $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ i $f''(x) < 0$ na intervalu $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ pa su to područja konveksnosti, odnosno konkavnosti. Točke infleksije su očito $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ i $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ jer je tu druga derivacija jednaka nuli i funkcija se mijenja iz konveksne u konkavnu u x_1, odnosno iz konkavne u konveksnu u x_2.

Primjer 3 Nađite točke infleksije funkcije $f(x) = (x-1)^3 + 5$.

Rješenje: Tražimo drugu derivaciju:

$$f'(x) = 3(x-1)^2 \ \Rightarrow f''(x) = 6(x-1)$$

i odmah vidimo da je jedini kandidat $x_1 = 1$. No, za njega je očito i prva derivacija jednaka nuli, tj $f'(x_1) = 0$ pa provjeravamo trecu derivaciju umjesto da gledamo predznak druge derivacije lijevo i desno od x_1.

$$f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(1) = 6 \neq 0$$

pa je tu točka infleksije.

Zadatak 4

1. Istražite područje konveksnosti i konkavnosti te nađite točke infleksije sljedećih funkcija:

   (a) $f(x) = (x+1)^4$

   (b) $f(x) = x - \sin x$

   (c) $f(x) = \frac{1}{x+3}$

   (d) $f(x) = (1 + x^2)e^x$

Imamo sljedeće definicije:
Ubrzani rast: područje na kojem funkcija raste i konveksna je
Usporeni rast: područje na kojem funkcija raste i konkavna je
Ubrzani pad: područje na kojem funkcija pada i konkavna je
Usporeni pad: područje na kojem funckija pada i konveksna je

Primjer 5 Odredite područja ubrzanog i usporeng pada, odnosno rasta funkcije $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$.

Rješenje: Već znamo da je prva derivacija (vidi Primjer 1) jednaka $f'(x) = x^2 - 4$ pa funkcija raste na intervalu $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ odnosno pada na $(-2, 2)$. Provjeravamo drugu derivaciju na tim intervalima:

$$f''(x) = 2x \Rightarrow f''(x) > 0 \quad \text{za} \quad x > 0, \quad f''(x) < 0 \quad \text{za} \quad x < 0.$$

Očito je točka infleksije $x_0 = 0$ i zaključujemo:

a) na intervalu $(-\infty, -2)$ funkcija raste i konkavna je pa imamo usporeni rast

b) na intervalu $(-2, 0)$ funkcija pada i konkavna je pa imamo ubrzani pad

c) na intervalu $(0, 2)$ funkcija pada i konveksna je pa imamo usporeni pad

d) na intervalu $(2, +\infty)$ funkcija raste i konveksna je pa imamo ubrzani rast

1.0.3 Ispitivanje toka funkcije i crtanje grafa

Kod crtanja grafa funkcije moramo prvo u nekoliko koraka odrediti sljedeće parametre:

(1) domena funkcije,

(2) nultočke,

(3) asimptote,

(4) kandidate za ekstreme (prva derivacija),

(5) ekstreme i točke infleksije (druga derivacija),

(6) tok (prva derivacija).

Asimptote :

vertikalne asimptote: točke prekida funkcije

horizontalne asimptote: $\lim_{x\to-\infty} f(x) \longrightarrow$ lijeva horizontalna asimptota,
$\lim_{x\to+\infty} f(x) \longrightarrow$ desna horizontalna asimptota

kosa asimptota: $y = kx+l$ gdje je $k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$,
$l = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)$.

Ekstremi : $f'(x_0) = 0 \longrightarrow x_0$ je kandidat; $f''(x_0) > 0$ lokalni minimum,
$f''(x_0) < 0$ lokalni maksimum

Točke infleksije : $f''(x_0) = 0$ ili $f''(x_0)$ ne postoji: x_0 je točka infleksije ako f'' u intervalima $(x_0 - \delta, x_0)$ i $(x_0, x_0 + \delta)$ za neko δ zadržava konstantne predznake i ako su ti predznaci suprotni.

Tok :

$f'(x) > 0$ funkcija raste,
$f'(x) < 0$ funkcija pada.

Primjer 1 Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{2x-x^2}$.

Rješenje: Jednostavno slijedimo upute:

(1) Domena: $2x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, 2$ pa je domena $\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\{0, 2\}$.

(2) Nultočke: $f(x) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 2x - 3 = 0 \;\Rightarrow$
$x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} = 1 \pm 2 \;\Rightarrow$
$x_1 = -1 \quad (-1, 0)$,
$x_2 = 3 \quad (3, 0)$.

(3) Asimptote:
$V.A.\quad x = 0,\; x = 2$
$H.A.\quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x-3}{2x-x^2} = -1$ pa je horizontalna asimptota $y = 1$.
$K.A.$ nema

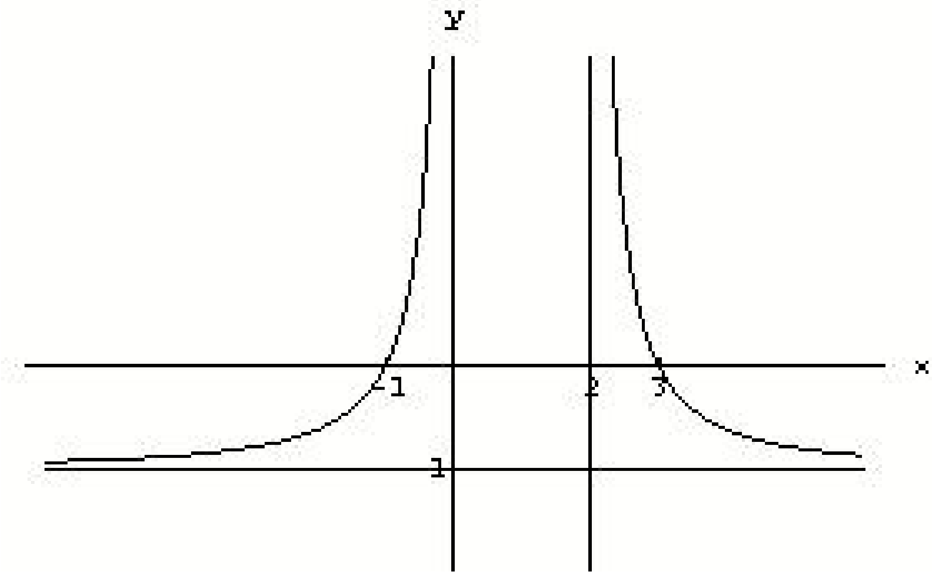
(4) Kandidati za ekstreme: $f'(x) = \cdots = \frac{-6x+6}{(2x-x^2)^2}$ pa $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$.

(5) Ekstremi i točke infleksije: $f''(x) = \cdots = \frac{-6-2(-6x+6)(2x-x^2)(2-2x)}{(2x-x^2)^4}$.
Sada imamo

$$f''(1) = -6 < 0 \quad \text{pa je u} \quad x = 1 \quad \text{lokalni maksimum.}$$

(6) Tok:

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 \Rightarrow x \in (1, +\infty) \quad \text{pa tu funkcija pada,} \\ f'(x) &> 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \quad \text{pa tu funkcija raste.} \end{aligned}$$



Slika 1.1: Graf funkcije $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{2x-x^2}$

Na temelju gornjih opažanja sada je lako nacrtati graf:

Primjer 2 Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = x^3 e^{-x^2}$.

Rješenje:

(1) Domena: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

(2) Nultočke: $x = 0$

(3) Asimptote:
V.A. nema
H.A. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^{x^2}} = L'H = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{2xe^{x^2}} = 0$ pa je horizontalna asimptota u oba smjera $y = 0$.
K.A. $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = L'H = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = 0$ pa kosih asimptota nema.

(4) Kandidati za ekstreme: $f'(x) = 3x^2 e^{-x^2} + x^3 e^{-x^2}(-2x) = 0$ pa su kandidati $x_1 = 0$ i $x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

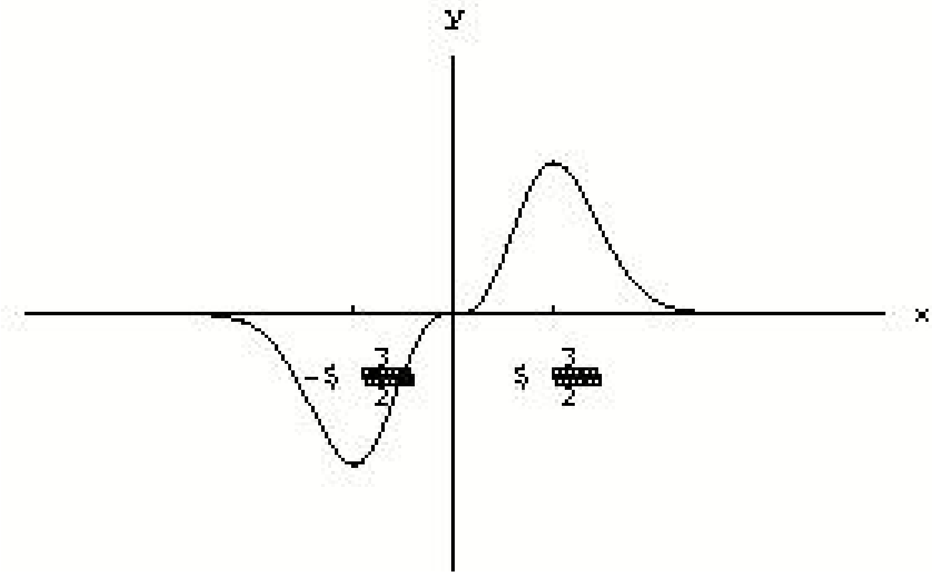
(5) Ekstremi i točke infleksije: $f''(x) = \cdots = xe^{-x^2}(4x^4 - 14x^2 + 6)$. Sada imamo

$$\begin{aligned} f''(0) &= 0 \quad \text{pa je} \quad x = 0 \quad \text{točka infleksije},\\ f''\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) &< 0 \quad \text{pa je u} \quad x = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{lokalni maksimum},\\ f''\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) &> 0 \quad \text{pa je u} \quad x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{lokalni minimum}. \end{aligned}$$

(6) Tok: $f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; 3 - 2x^2 < 0 \Rightarrow\; |x| > \sqrt{\frac{3}{2}}$ pa tu funkcija pada,

a $f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; |x| < \sqrt{\frac{3}{2}}$ pa na tom intervalu funkcija raste.

Crtamo graf:



Slika 1.2: Graf funkcije $f(x) = x^3 e^{-x^2}$

Zadaci sa rokova:

1. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = e^{\sin x}$.
2. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
3. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = \arctan\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.
4. Odredite graf funkcije $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.
5. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = \left(1 + x^3\right)^{-1}$.
6. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = \arctan x - x$.
7. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 5$.
8. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5) - \ln 2$.
9. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = x^2 2^{-x}$.
10. Nacrtajte kvalitativni graf funkcije $f(x) = 1 - e^{-\mathrm{cosx}}$.
11. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = \frac{x^3+8x^2+27x+27}{2(x+2)^2}$.
12. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije: $f(x) = x - 1 + e^{\frac{1}{1-x}}$.

13. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije: $f(x) = \arctan(1 - \frac{1}{x})$.
14. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^{\frac{1}{3}}}$.
15. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$.
16. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = (x-1)^{-1/2} \cdot \ln(x-1)$.
17. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$.
18. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = x \cdot \sqrt{8 - x^2}$.
19. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = \frac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$.